

Probabilidad II
Tercero de Matemáticas UAM, curso 2006-2007
Examen de junio, 14-6-2007

Nombre y Apellidos

--	--	--	--	--	--

1. (4 puntos) Contesta brevemente, pero argumentando tu respuesta, a las siguientes cuestiones:

- a) Sean X e Y dos variables aleatorias independientes, con varianzas respectivas σ_1^2 y σ_2^2 . ¿Cuál es la varianza de la variable $X - Y$?
- b) Sea X una variable aleatoria uniforme en $[-1, 1]$. Escribe su función de densidad $f_X(x)$ y calcula su función generatriz de momentos $M_X(t)$.
- c) Sean $X_1, X_2, \dots$ variables aleatorias i.i.d., con función de distribución común $F(x)$. Escribe la función de distribución de la variable $Z_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.
- d) Sean X e Y dos variables aleatorias i.i.d. que toman valores en $\{0, 1, 2, \dots\}$. Sea $G(s)$ su función generatriz de probabilidad común. Escribe, en términos de esta función generatriz, la probabilidad de que $X + Y$ sea un número par (o cero).
- e) Sea (X_n) una sucesión de variables aleatorias tales que $\mathbf{E}[(X_n - X)^2] \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ para cierta variable X . Comprueba que $X_n \xrightarrow{P} X$ cuando $n \rightarrow \infty$.
- f) Consideremos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, donde $\Omega = [-1, 1]$, $\mathcal{F}$ son los borelianos y $\mathbf{P}$ es la medida de Lebesgue dividida por 2. Sea X una variable aleatoria dada por $X(\omega) = \omega^4$ para cada $\omega \in \Omega$. Llamemos μ_X a la distribución de probabilidad definida por esta variable aleatoria X . Calcula $\mu_X([a, b])$, donde $0 < a < b < 1$.

2. (2 puntos) Sea una sucesión $X_1, X_2, \dots$ de variables aleatorias independientes dadas por

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } 1/2^{j+1}; \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - (1/2^j); \\ -1 & \text{con probabilidad } 1/2^{j+1}. \end{cases} \quad \text{para cada } j = 1, 2, \dots$$

(a) Comprueba que

$$X_n \xrightarrow{P} 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

(b) Comprueba que

$$X_n \xrightarrow{c.s.} 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

(observa que este segundo apartado implica el primero).

3. (2 puntos) Vamos a lanzar muchas veces una moneda (con probabilidad $p = 10\%$ de que salga cara). Los lanzamientos son *independientes*. Llamemos T_1 al número de lanzamientos hasta que sale la primera cara. Contamos, desde ese momento, el número de lanzamientos hasta que salga la siguiente: sea T_2 ese número de lanzamientos. Y así sucesivamente, hasta que aparece la cara número 40. Consideremos la variable aleatoria que registra el número de lanzamientos hasta esa cuadragésima cara; esto es, $T_1 + T_2 + \cdots + T_{40}$.

Estima la probabilidad de que $T_1 + T_2 + \cdots + T_{40}$ tome un valor entre 400 y 490.

4. (2 puntos) Consideremos un camino aleatorio

$$S_n = S_0 + \sum_{j=1}^n X_j \quad (\text{que arranca en } S_0 = 0)$$

para el que $\mathbf{P}(X_j = +1) = p$, para cada $j = 1, 2, \dots$. Calcula $\mathbf{P}(S_4 = 2, S_8 = 0, S_{12} = 2)$.

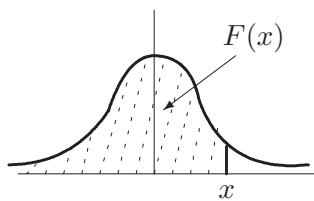
5. (1 punto extra) Tenemos una baraja francesa, que consta de 52 cartas, la mitad rojas y la otra mitad negras. Las cartas están situadas boca abajo en un montón bien barajado. En cada movimiento, el jugador descubre una carta de la baraja, observa su color y la deposita en la mesa. En cierto momento (y sólo una vez), el jugador dirá “¡roja en la siguiente!”. Ganará si, efectivamente, la carta que se descubre es efectivamente roja.

Llamemos $(\mathcal{F}_n)$ a la filtración que recoge la información sobre las primeras n extracciones.

- Llamemos R_n al número de cartas rojas que quedan en el montón *justo después* de descubrir la n -ésima carta. Calcula $\mathbf{E}(R_n | \mathcal{F}_{n-1})$ y comprueba que la sucesión de variables aleatorias (X_n) , dada por $X_n = R_n / (52 - n)$ para cada n , es una martingala.
- Comprueba que no existe una estrategia para el jugador con la que la probabilidad de ganar el juego sea distinta de $1/2$. (Sugerencia: una estrategia en este juego es un tiempo de parada).

Notas y comentarios:

- Algunos valores de la función de distribución de una variable aleatoria normal $\mathcal{N}(0, 1)$:



$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$$

	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8079	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990