

**Conjuntos y Números
Primero de Matemáticas**

Examen de septiembre, 5-9-2003

1. (2 puntos) Hallar la descomposición en factores primos del número $1^2 + 2^2 + \dots + 100^2$.
(Sugerencia: demostrar por inducción que $S(n) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ es un polinomio cúbico en n)

2. (2 puntos) Resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x \equiv 3 \pmod{5} \\ 7x \equiv 8 \pmod{11} \\ 30 \leq x < 85 \end{cases}$$

3. (2 puntos)

a) Sea X el conjunto de los números reales definido por la siguiente propiedad:

$$a \in X \text{ si existe un polinomio } p(x) \text{ de coeficientes enteros tal que } p(a) = 0.$$

Se pregunta si X es o no numerable.

b) ¿Cuál es la respuesta a la pregunta anterior si ahora permitimos que los coeficientes sean números reales ≥ 0 y ≤ 1 ?

4. (2 puntos) En \mathbb{R}^2 definimos la relación siguiente:

$$(x, y) \mathcal{R} (x', y') \iff \begin{cases} xy = x'y' \\ \text{ó} \\ xy = -x'y' \end{cases}$$

a) Demostrar que se trata de una relación de equivalencia.

b) Describir el conjunto cociente $\mathbb{R}^2/\mathcal{R} = X$ y definir en X una relación de orden.

5. (2 puntos)

a) Hallar las soluciones en el cuerpo \mathbb{C} de los números complejos de la ecuación

$$x^8 - x^4 - 2 = 0.$$

b) Representarlas gráficamente.