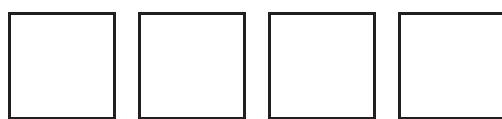


Álgebra II
Primero de Ingeniería Informática UAM, curso 2010-2011
Examen de septiembre, 13-9-2011

Nombre y Apellidos



1. (2 puntos) Contesta brevemente, argumentando las respuestas, a las siguientes cuestiones:

- 1) Sea A una matriz cuadrada tal que A^2 es invertible. Prueba que A es invertible.
- 2) Sea V un espacio vectorial y sean A y B dos subespacios vectoriales de V . Prueba que

$$A + B = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} : \mathbf{x} \in A, \mathbf{y} \in B\}.$$

es un subespacio vectorial de V .

- 3) Sea $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes en un espacio vectorial V . Comprueba que el conjunto de vectores $\{\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}\}$ es también linealmente independiente.
- 4) Sean A y B matrices $n \times n$. Prueba que si λ es un autovalor de $A \cdot B$, entonces también lo es de $B \cdot A$.

2. (2 puntos) En el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ax + (a+d)y &= a+2d \\ (a+3d)x + (a+4d)y &= a+5d \end{cases}$$

los coeficientes (leídos de izquierda a derecha y por filas: $a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, a+5d$) siguen una progresión aritmética de diferencia $d \neq 0$ y que empieza en a . Prueba que el sistema tiene solución única y hállala.

b) Escribe el sistema correspondiente de tres ecuaciones con tres incógnitas (con coeficientes que siguen una progresión aritmética de diferencia $d \neq 0$ y que empieza en a ; el primero sería a , y el último, $a+11d$) y comprueba si tiene o no solución única.

3. (2 puntos) Fijamos un entero $n \geq 156$. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_n[x]$ de los polinomios de grado a lo sumo n con coeficientes reales, consideramos los dos siguientes subespacios vectoriales:

$$V = \{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] : p(0) = 0, \quad p(1) = 0\}; \quad W \text{ tiene una base dada por } \{1, \quad x, x(x-1)\}.$$

a) Halla una base de V . ¿Qué dimensión tiene W ?

b) Halla una base de $V \cap W$.

- 4.** (2 puntos) En el espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se define el siguiente producto escalar: para dos matrices genéricas $M, N \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$,

$$\langle M, N \rangle = \text{traza}(M \cdot N^t).$$

Consideremos ahora el subespacio vectorial V de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ cuya base viene dada por

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Comprueba que los dos elementos de la base no son perpendiculares. Halla, con el algoritmo de Gram–Schmidt, una base ortonormal de V a partir de la dada.

- 5.** (2 puntos) Considera la aplicación $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ dada por

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & a & b \\ c & d & a \end{pmatrix}.$$

- a) Halla la matriz de f si escogemos las respectivas bases canónicas de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.
b) Comprueba si la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

pertenece o no a $\text{Im}(f)$.