Álgebra II
Primero de Ingeniería Informática UAM, curso 2010-2011
Examen de septiembre, 13-9-2011

Nombre y Apellidos ....

---

1. (2 puntos) Contesta brevemente, argumentando las respuestas, a las siguientes cuestiones:

1) Sea A una matriz cuadrada tal que A^2 es invertible. Prueba que A es invertible.

2) Sea V un espacio vectorial y sean A y B dos subespacios vectoriales de V. Prueba que

$$A + B = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} : \mathbf{x} \in A\,, \mathbf{y} \in B\}.$$

es un subespacio vectorial de V.

3) Sea $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes en un espacio vectorial V. Comprueba que el conjunto de vectores $\{\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}\}$ es también linealmente independiente.

4) Sean A y B matrices $n \times n$. Prueba que si λ es un autovalor de $A \cdot B$, entonces también lo es de $B \cdot A$.

2. (2 puntos) En el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a\,x + (a+d)\,y & = & a + 2d \\ (a+3d)\,x + (a+4d)\,y & = & a + 5d \end{array} \right.$$

los coeficientes (leídos de izquierda a derecha y por filas: a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, $a+4d$, $a+5d$) siguen una progresión aritmética de diferencia $d \neq 0$ y que empieza en a. Prueba que el sistema tiene solución única y hállala.

b) Escribe el sistema correspondiente de tres ecuaciones con tres incógnitas (con coeficientes que siguen una progresión aritmética de diferencia $d \neq 0$ y que empieza en a; el primero sería a, y el último, $a + 11d$) y comprueba si tiene o no solución única.

3. (2 puntos) Fijamos un entero $n \geq 156$. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_n[x]$ de los polinomios de grado a lo sumo n con coeficientes reales, consideramos los dos siguientes subespacios vectoriales:

$$V = \big\{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] : p(0) = 0, \quad p(1) = 0\big\}; \quad W \text{ tiene una base dada por } \{1,\; x, x(x-1)\}.$$

a) Halla una base de V. ¿Qué dimensión tiene W?

b) Halla una base de $V \cap W$.

4. (2 puntos) En el espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se define el siguiente producto escalar: para dos matrices genéricas $M, N \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$,

$$< M, N >= \text{traza}\,(M \cdot N^t).$$

Consideremos ahora el subespacio vectorial V de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ cuya base viene dada por

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Comprueba que los dos elementos de la base no son perpendiculares. Halla, con el algoritmo de Gram–Schmidt, una base ortonormal de V a partir de la dada.

5. (2 puntos) Considera la aplicación $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ dada por

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & a & b \\ c & d & a \end{pmatrix}.$$

a) Halla la matriz de f si escogemos las respectivas bases canónicas de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

b) Comprueba si la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

pertenece o no a $\text{Im}\,(f)$.