Álgebra II
Primero de Ingeniería Informática UAM, curso 2009-2010
Examen de septiembre, 10-9-2010

Nombre y Apellidos ....

---

1. (4 puntos) Contesta brevemente, pero argumentando las respuestas, a las siguientes cuestiones:

1) Definimos la aplicación $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x]$ dada por
$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + (b+c)x + dx^2 .$$
¿Es f una aplicación lineal?

2) Sea $f : X \to Y$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales X e Y. Consideramos el siguiente conjunto:
$$\ker(f) = \{\mathbf{x} \in X : f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}.$$
Comprueba que $\ker(f)$ es un subespacio vectorial de X.

3) Sea A una matriz 3×3 cada una de cuyas filas suma 1. Halla un autovector asociado al autovalor $\lambda = 1$.

4) La traza $\mathrm{tr}(A)$ de una matriz cuadrada A se define como la suma de las entradas de su diagonal. Comprueba si, dadas dos matrices cuadradas A y B de dimensiones $n \times n$ cualesquiera, se cumple que
$$\mathrm{tr}(A \cdot B^t) = \mathrm{tr}(B \cdot A^t).$$

5) Sea A una matriz cuadrada de dimensiones $n \times n$ tal que $A^t = A^{-1}$. Comprueba que las filas de A son todas de longitud 1 y que son perpendiculares entre sí.

6) En el espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ se define un producto escalar
$$< p(x), q(x) >= \beta \int_0^1 p(x)q(x)dx \,,$$
donde $\beta > 0$. ¿Cuánto debe valer β para que el polinomio $p(x) = 1+x+x^2$ tenga norma 1?

7) ¿Qué condiciones debe cumplir α para que la forma cuadrática
$$Q(x,y,z) = (x,y,z)\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{sea definida positiva?}$$

8) En un espacio vectorial V de dimensión 3 consideramos las siguientes bases: $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{w}\}$. Si (a,b,c) son las coordenadas de un vector $\mathbf{z}$ en la base $\mathcal{B}_1$, ¿cuáles son las coordenadas de $\mathbf{z}$ en la base $\mathcal{B}_2$?

2. (2 puntos) Considera la aplicación $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ dada por

$$f(p(x)) = x\,p(x).$$

a) Halla la matriz de f si escogemos

$$\mathcal{B}_1 = \left\{1,\ x,\ 1+x^2\right\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_2 = \left\{3,\ x-1,\ x+x^2,\ x+x^2+x^3\right\}$$

como bases de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathbb{R}_3[x]$, respectivamente.

b) Halla una base de $\mathrm{Im}(f)$.

3. (2 puntos) En $\mathbb{R}^6$, consideramos los dos siguientes subespacios vectoriales:

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{R}^6 : x_1 - x_2 = 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\};$$

$$W \text{ tiene, como base, } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Halla bases de los subespacios $V \cap W$ y $V + W$.

4. (2 puntos) En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ definimos el siguiente producto escalar: para dos vectores genéricos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ y $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$,

$$< \mathbf{x}, \mathbf{y} >= 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3.$$

Construye, con el algoritmo de Gram-Schmidt, una base ortonormal a partir de la siguiente:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$