Álgebra II
Primero de Ingeniería Informática UAM, curso 2010-2011
Examen final, 3-6-2011

Nombre y Apellidos ....

---

1. (4 puntos) Contesta brevemente, pero argumentando las respuestas, a las siguientes cuestiones:

1) Comprueba si la aplicación

$$\phi : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

dada por $\phi(A,B) = \operatorname{tr}(A+B)$ es o no un producto escalar.

2) Sea V un espacio vectorial y sean A y B dos subespacios vectoriales de V. Demuestra que $A \cap B$ es también un subespacio vectorial de V.

3) Determina para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ la aplicación

$$\begin{aligned} f:\ & \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x] \\ & p(x) \mapsto f(p(x)) = p(x) + p'(x) + \alpha \end{aligned}$$

es una aplicación lineal.

4) Consideramos los subespacios de $\mathbb{R}^4$ siguientes:

$$\begin{aligned} V &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y=0,\ x-z+t=0\} \\ W &\ \text{ tiene, como base, } \{(1,1,0,0),(2,-2,1,-1)\}. \end{aligned}$$

Determina si el vector $\mathbf{u} = (1,-1,0,-1)$ pertenece o no a la intersección $V \cap W$.

5) En el espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se define el siguiente producto escalar:

$$< A, B >= \operatorname{tr}(A \cdot B^t)$$

¿Qué condiciones debe cumplir una matriz para ser perpendicular a la matriz identidad?

6) Sea A una matriz cuadrada invertible (y, por tanto, de determinante no nulo). Demuestra que

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

7) Determina para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ la forma cuadrática

$$Q(x, y, z) = 2x^2 + \alpha\, xy + y^2 + z^2$$

es definida positiva.

8) En el espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, consideramos el subespacio vectorial

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a + b = 0,\ c - d = 0 \right\}$$

¿Qué dimensión tiene? Halla una base de V.

2. (2 puntos) En $\mathbb{R}_3[x]$ (los polinomios de grado ≤ 3 con coeficientes reales), consideramos los dos siguientes subespacios vectoriales:

$$V = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] : p(0) = 0, \quad p(1) = 0\};$$

$$W \text{ tiene, como base, } \{1 + x,\ x + x^2 - 2x^3\}.$$

Halla bases de los subespacios V y $V \cap W$.

3. (2 puntos) En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ definimos el siguiente producto escalar: para dos vectores genéricos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$,

$$< \mathbf{x}, \mathbf{y} >= 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + 4x_4y_4.$$

Construye, con el algoritmo de Gram-Schmidt, una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$ a partir de la siguiente:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

4. (2 puntos) Considera la aplicación $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \\ c + d \\ a + b + c + d \end{pmatrix}.$$

a) Halla la matriz de f si escogemos

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

como bases de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

b) Halla una base de $\ker(f)$.