Álgebra II
Primero de Ingeniería Informática UAM, curso 2009-2010
Examen final, 14-6-2010

Nombre y Apellidos ....

---

1. (4 puntos) Contesta brevemente, pero argumentando las respuestas, a las siguientes cuestiones:

1) Sea $f : X \to Y$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales X e Y. Consideramos el siguiente conjunto:
$$\mathrm{Im}(f) = \{\mathbf{y} \in Y : \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \text{ para algún } \mathbf{x} \in X\}.$$
Comprueba que $\mathrm{Im}(f)$ es un subespacio vectorial de Y.

2) Sea A una matriz $n \times n$. Supongamos que $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ (es decir, λ es un autovalor de A, y $\mathbf{u}$ es un autovector de A asociado a λ). Considera ahora la matriz $B = 3A + 2I$ (donde I es la matriz identidad $n \times n$). ¿Es $\mathbf{u}$ un autovector de B? ¿A qué autovalor está asociado?

3) ¿Puede una matriz A de dimensiones $n \times n$ ser invertible si $\lambda = 0$ es uno de sus autovalores?

4) En un espacio vectorial V de dimensión 3 consideramos las siguientes bases: $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{u} - \mathbf{w}\}$. Si (a, b, c) son las coordenadas de un vector $\mathbf{z}$ en la base $\mathcal{B}_1$, ¿cuáles son las coordenadas de $\mathbf{z}$ en la base $\mathcal{B}_2$?

5) Sea $< \cdot, \cdot >$ un producto escalar definido en un espacio vectorial V. Comprueba que, para todo par de vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$,
$$< \mathbf{u}, \mathbf{v} > = \frac{1}{4}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2.$$

6) Sean A y B matrices simétricas $n \times n$. Comprueba si las siguientes matrices son simétricas o no:
$$C = (A + B)(A - B) \qquad \text{y} \qquad D = A^2 - ABA.$$

7) ¿Qué condiciones debe cumplir α para que la siguiente forma cuadrática
$$Q(x, y) = 2x^2 + 2xy + 2\alpha\, y^2.$$
sea definida positiva?

8) Sea $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dada por
$$f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ a_2 + a_3 & a_2 - a_3 \end{pmatrix}.$$
Comprueba que f es una aplicación lineal.

2. (2 puntos) En $\mathbb{R}^5$, consideramos los dos siguientes subespacios vectoriales:

$$V = \{(x,y,z,t,u) \in \mathbb{R}^5 : y+z=0, \quad x+t+u=0\};$$

$$W \text{ tiene, como base, } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Halla bases de los subespacios $V \cap W$ y $V + W$.

3. (2 puntos) Consideramos el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ (los polinomios de grados ≤ 2 con coeficientes reales), en el que definimos el siguiente producto escalar:

$$< p(x), q(x) >= \frac{1}{2} \int_0^2 p(x) \cdot q(x) \, dx.$$

Halla una base ortonormal de $\mathbb{R}_2[x]$.

4. (2 puntos) Considera la aplicación $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c-d \end{pmatrix}.$$

a) Halla la matriz de f si escogemos

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

como bases de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente.

b) Halla una base de $\ker(f)$.