Probabilidad y Estadística
Segundo del grado en Telecomunicaciones, UAM, 2014-2015

Examen parcial, 17-12-2014

Nombre y Apellidos ....

1. (2 puntos) Tenemos una muestra de tamaño 9 de una variable X que sigue una $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. La media muestral es $\overline{x} = 2.0$, y la cuasidesviación típica muestral, $s = 0.5$. Queremos contrastar la hipótesis $H_0 : \mu \leq 1.5$. Al nivel de significación $\alpha = 5\,\%$, ¿rechazaremos o aceptaremos la hipótesis? Calcula (aproximadamente) el p-valor.

2. (2 puntos) En un concurso se utiliza un bombo en el que nos aseguran que hay 500 bolas: 50 blancas, 150 azules, 250 rojas y 50 negras. Como nos nos fiamos mucho, decidimos observar los resultados de 100 extracciones del bombo, en las que han salido 7 blancas, 33 azules, 40 rojas y 20 negras. (Tras cada extracción, la bola se devuelve al bombo). ¿Podemos rechazar, con nivel de significación 5 %, la hipótesis de que la composición del bombo es la que nos garantizaban?

3. (2 puntos) El número de erratas por página en un libro sigue una Poisson. Queremos contrastar la hipótesis de que el parámetro de la Poisson es $\lambda = 5$. Tras revisar las 20 primeras páginas, hemos encontrado lo siguiente:

número de erratas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
# de páginas	0	1	0	0	3	7	4	2	2	0	1

(por ejemplo, se han encontrado 7 páginas con exactamente 5 erratas). Fijado un nivel de significación $\alpha = 5\,\%$, ¿qué podemos concluir?

4. (2 puntos) Tenemos dos poblaciones de insectos. En la primera hay una proporción p_1 de insectos portadores de un cierto virus; p_2 es la correspondiente proporción en la segunda población. Estas proporciones p_1 y p_2 son, claro, desconocidas. Para obtener un intervalo de confianza para la diferencia $p_1 - p_2$, tomaremos una muestra de tamaño n en la población 1 y otra muestra (del mismo tamaño) en la población 2. Determina n para que la longitud de ese intervalo de confianza al 95 % sea, como mucho, de un 2 %. (Nota: observa que se pide el valor de n. Estamos diseñando el procedimiento, así que las muestras todavía *no están disponibles*).

5. (2 puntos) La variable aleatoria X toma los valores 0, 1 y 2 con probabilidades θ, $1/2$ y $1/2 - \theta$, respectivamente. Aquí θ es un parámetro, $\theta \in [0, 1/2]$.

a) Dada una muestra $x_1, \ldots, x_n$ de la variable X, obtén un estimador de θ por el método de los momentos.

b) Obtén el estimador de θ por máxima verosimilitud.

Percentiles de la χ^2 con n grados de libertad ($n = 1, \ldots, 12$), $\alpha = 5\,\%$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\chi^2_{\{n;5\,\%\}}$	3.84	5.99	7.81	9.49	11.07	12.59	14.07	15.51	16.92	18.31	19.68	21.03

Algunos percentiles de la t de Student con n grados de libertad ($n = 1, \ldots, 12$):

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$t_{\{n;0.5\,\%\}}$	63.66	9.92	5.84	4.60	4.03	3.71	3.50	3.36	3.25	3.17	3.11	3.05
$t_{\{n;1.0\,\%\}}$	31.82	6.96	4.54	3.75	3.36	3.14	3.00	2.90	2.82	2.76	2.72	2.68
$t_{\{n;2.5\,\%\}}$	12.71	4.30	3.18	2.78	2.57	2.45	2.36	2.31	2.26	2.23	2.20	2.18
$t_{\{n;5\,\%\}}$	6.31	2.92	2.35	2.13	2.02	1.94	1.89	1.86	1.83	1.81	1.80	1.78

Algunos valores de percentiles de la normal estándar:

α	5 %	4.5 %	4.0 %	3.5 %	3.0 %	2.5 %	2.0 %	1.5 %	1.0 %	0.5 %
z_α	1.645	1.695	1.751	1.812	1.881	1.960	2.054	2.170	2.326	2.576

Variable Poisson. Una variable aleatoria X sigue una POISSON(λ), con $\lambda > 0$, si toma los valores 0, 1, 2,... con probabilidades

$$\mathbf{P}(X = k) = \lambda^k \, \frac{e^{-\lambda}}{k!} \qquad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots$$