

Probabilidad y Estadística
Segundo del grado en Telecomunicaciones, UAM, 2014-2015

Examen parcial, 12-11-2014

Nombre y Apellidos

--	--	--	--	--

1. (4 puntos) Contesta razonadamente a las siguientes preguntas:

- a) La variable X toma 201 valores distintos: $\{-100, -99, \dots, -1, 0, 1, \dots, 99, 100\}$, cada uno de ellos con probabilidad $1/201$. Definimos ahora la variable $Y = \sqrt{X^2} + 1$. ¿Cuántos valores distintos toma la variable Y ? ¿Cuáles? ¿Con qué probabilidades?
- b) La variable aleatoria X sigue una exponencial de parámetro $\lambda = 2$. Se toman 900 muestras independientes de X y se calcula la media aritmética de ellas. ¿Cuál es la probabilidad de que ese promedio sea mayor que 0.51?
- c) Se lanza dos veces el dado (regular, equilibrado). La variable X vale 1 si la puntuación total es par, y 0 si es impar. La variable Y vale 1 si la máxima puntuación obtenida es un 5, y 0 en caso contrario. ¿Son X e Y independientes?
- d) La variable X tiene función de densidad $f(x) = |x|$, si $x \in [-1, 1]$ (y vale 0 en el resto). Calcula la función de distribución $F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$ y dibuja su gráfica.

2. (2 puntos) Un vector aleatorio (X, Y) tiene función de densidad conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} Cxy & \text{si } x \in [0, 1] \text{ e } y \in [0, 1]; \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

- a) Halla el valor de C .
- b) Calcula la probabilidad de que $Y \leq X^2$.

3. (2 puntos) Tenemos una baraja española con 40 cartas (hay cuatro ases en la baraja). Vamos a ir lanzando cartas sobre la mesa hasta que salga un as. El juego acaba en cuanto sale ese primer as.

a) En la primera versión del juego, tras lanzar cada carta, ésta se devuelve al montón, y se vuelven a mezclar las cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que salga el primer as en el tercer lanzamiento? ¿Cuánto tarda el juego, en media, en terminar?

b) En una segunda versión, las cartas no se devuelven al montón. ¿Cuál es la probabilidad de que salga el primer as en el quinto lanzamiento?

4. (2 puntos) Tenemos una variable aleatoria X normal de parámetros $\mu = 1$ y $\sigma = 2$. Se sortean 10 muestras (independientes) de X .

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que la tercera caiga en el intervalo $(0, 2)$?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 8 de ellas caigan fuera del intervalo $(0, 2)$?

Notas.

- Las respuestas a cuestiones que se refieran a la normal se pueden (y **se deben**) dejar escritas en términos de Φ , la función de distribución de la normal estándar.
- Si X es una variable $\text{EXP}(\lambda)$, para $\lambda > 0$, entonces tiene función de densidad $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$ (y 0 en caso contrario). Su media es $\mathbf{E}(X) = 1/\lambda$, y su varianza $\mathbf{V}(X) = 1/\lambda^2$.
- Si X es una variable $\text{BIN}(n, p)$, donde n es un entero positivo y $0 < p < 1$, entonces toma valores $0, 1, \dots, n$, de manera que cada valor j se toma con probabilidad $\mathbf{P}(X = j) = \binom{n}{j} p^j (1 - p)^{n-j}$. La media de X es $\mathbf{E}(X) = np$, y su varianza $\mathbf{V}(X) = np(1 - p)$.