Estadística I
Tercero del grado en Matemáticas, UAM, 2015-2016

Examen parcial 2, 18-12-2015

Apellidos, nombre ....

1. (2.5 puntos) La variable X tiene función de densidad

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \theta\, x^{\theta-1} & \text{para } 0 < x < 1; \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Aquí, $\theta > 0$ es un parámetro positivo. Los primeros momentos de X son

$$\mathbf{E}_\theta(X) = \frac{\theta}{\theta+1} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{E}_\theta(X^2) = \frac{\theta}{\theta+2}.$$

Sea $T(X_1, \ldots, X_n)$ el estimador de θ para una muestra aleatoria de tamaño n que se obtiene por el método de momentos (usando el primer momento). Escribe un resultado de normalidad asintótica para T.

2. (2.5 puntos) De cara a las elecciones del próximo 20-D, una empresa demoscópica está interesada en las siguientes cuestiones.

a) Llamamos p_1 a la proporción de votantes por el partido A en Madrid, y p_2 a la proporción en Barcelona. Interesa estimar la diferencia $p_1 - p_2$. Para ello, se tomará una muestra de n personas en Madrid, y de otras n personas en Barcelona.

Calcula el mínimo valor de n que garantice que, con confianza del 95 %, el error al estimar $p_1 - p_2$ sea menor del 1 %.

b) Se pregunta a 1000 personas en Madrid, y se obtiene que un 30 % de ellas votará por el partido A. En la muestra (también de 1000 personas) en Barcelona se obtiene un 32 % de votantes del partido A.

Con nivel de significación del 5 %, ¿hay evidencia estadística para afirmar que $p_1 \neq p_2$?

3. (2.5 puntos) Una variable X sigue una exponencial de parámetro $\lambda > 0$. Se desea contrastar la hipótesis

$$H_0 : \lambda > 1.$$

Para ello se diseña el siguiente test: se toma una muestra aleatoria $x_1, \ldots, x_{10}$ de tamaño 10 de X, y se rechaza H_0 si el mayor de estos valores supera el valor t.

Se pide hallar t para que el nivel de significación de este test sea del 5 %.

4. (2.5 puntos) La variable X tiene función de densidad

$$f(x;\lambda) = \frac{\lambda}{2}\, e^{-\lambda\,|x|}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

donde λ es un parámetro positivo. Se quiere contrastar la hipótesis $H_0 : \lambda = 2$. Especifica la región de rechazo del test de razón de verosimilitudes correspondiente al nivel/calibre $c \in (0, 1)$.

Notas.

- Funciones de densidad y de distribución de una variable $X \sim \textsc{exp}(\lambda)$, con $\lambda > 0$:

  $$f_X(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x}, & \text{para } x \geq 0; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{para } x \geq 0; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

  Media $\mathbf{E}(X) = 1/\lambda$, varianza $\mathbf{V}(X) = 1/\lambda^2$.

- Algunos valores de percentiles z_α de la normal estándar:

  $$z_{10\,\%} = 1.282, \quad z_{5\,\%} = 1.645 \quad z_{2.5\,\%} = 1.960 \quad z_{1\,\%} = 2.326, \quad z_{0.5\,\%} = 2.576.$$