Estadística I
Tercero del grado en Matemáticas, UAM, 2014-2015

Examen parcial, 15-12-2014

Nombre y Apellidos ....

1. (2 puntos) La variable X tiene como función de densidad a $f(x;\theta) = \theta\, x^{-1-\theta}$ para $x > 1$. El parámetro θ es positivo. Datos: $\mathbf{E}_\theta(\ln(X)) = 1/\theta$; $\mathbf{E}_\theta(\ln^2(X)) = 2/\theta^2$.

a) Calcula la variable de información Y (asociada a X) y su varianza;

b) Escribe la cota de Cramér-Rao para cualquier estimador insesgado del parámetro θ que actúe sobre muestras de X de tamaño n.

2. (2 puntos) Sea X una variable normal de media μ y varianza conocida $\sigma^2 = 1$. El espacio de parámetros (para μ) es el intervalo $[-1, 1]$. Dada una muestra $(x_1, \ldots, x_n)$ de X, determina el estimador de máxima verosimilitud de μ.

3. (2 puntos) La función de densidad $f(x;\theta)$ de una variable X depende de un parámetro $\theta > 0$. Sabemos que $\mathbf{E}_\theta(X) = \theta^2$ y que $\mathbf{V}_\theta(X) = \theta^4$. Para estimar θ a partir de una muestra $(X_1, \ldots, X_n)$ usamos el estimador

$$T(X_1, \ldots, X_n) = \sqrt{\overline{X}_{(n)}}.$$

a) Usa el método delta para obtener la distribución asintótica de T.

b) Estima, suponiendo que n es grande, $\mathbf{P}(|T - \theta| > \theta/100)$.

4. (2 puntos) Tenemos dos poblaciones de insectos. En la primera hay una proporción p_1 de insectos portadores de un cierto virus; p_2 es la correspondiente proporción en la segunda población. Tomamos una muestra de tamaño n en la población 1 y una muestra del mismo tamaño en la población 2. Fijamos $\alpha = 5\,\%$. Determina n para que la longitud del intervalo de confianza al 95 % para la diferencia $p_1 - p_2$ sea, como mucho, de un 2 %.

5. (2 puntos) Sea $X \sim \textsc{exp}(\lambda)$, con $\lambda > 0$. Queremos contrastar la hipótesis $H_0\colon \lambda \geq 1$. Para ello, dada una muestra aleatoria $(x_1, \ldots, x_{10})$ de X de tamaño 10, calculamos $\text{mín}(x_1, \ldots, x_{10})$ y rechazamos la hipótesis si $\text{mín}(x_1, \ldots, x_{10}) > 0.3$. Calcula la función de potencia del test y su nivel de significación.

Notas.

- En los casos que corresponda, pueden dejarse las respuestas en términos de Φ, la función de distribución de la normal estándar.
- Si X es una variable $\textsc{exp}(\lambda)$, con $\lambda > 0$,

$$f(x;\lambda) = \lambda\, e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0; \qquad \text{media: } \mathbf{E}(X) = 1/\lambda, \qquad \text{varianza: } \mathbf{V}(X) = 1/\lambda^2.$$

- Si X es una variable $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$,

$$f(x;\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\sigma^2}}\, e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2}; \qquad \text{media: } \mathbf{E}(X) = \mu, \qquad \text{varianza: } \mathbf{V}(X) = \sigma^2.$$

- Algunos percentiles de la normal estándar:

α	5 %	4.5 %	4 %	3.5 %	3 %
$z_{\alpha/2}$	1.960	2.005	2.053	2.108	2.170

Estadística I
Tercero del grado en Matemáticas, UAM, 2014-2015

Examen parcial, 15-12-2014

Nombre y Apellidos ....

1. (2 puntos) La variable X tiene como función de densidad a

$$f(x;\theta) = \frac{\theta}{x^2}\, e^{-\theta/x} \qquad \text{para } x > 0.$$

El parámetro θ es positivo. Datos: $\mathbf{E}_\theta(1/X)) = 1/\theta$; $\mathbf{E}_\theta(1/X^2) = 2/\theta^2$.

a) Calcula la variable de información Y (asociada a X) y su varianza;

b) Escribe la cota de Cramér-Rao para cualquier estimador insesgado del parámetro θ que actúe sobre muestras de X de tamaño n.

2. (2 puntos) En una urna tenemos n bolas, rotuladas con los números de 1 a n. El valor de n es desconocido.

a) Sacamos una bola al azar y miramos el número que lleva inscrito. Calcula el estimador de máxima verosimilitud de n asociado a esta muestra de tamaño 1.

b) Ahora sacamos una bola, anotamos su número y la devolvemos a la urna; luego extraemos otra y anotamos su número. Calcula el estimador de máxima verosimilitud de n asociado a esta muestra de tamaño 2.

3. (2 puntos) La función de densidad $f(x;\theta)$ de una variable X depende de un parámetro $\theta > 0$. Sabemos que $\mathbf{E}_\theta(X) = 1/\theta$ y que $\mathbf{V}_\theta(X) = 2/\theta^2$. Para estimar θ a partir de una muestra $(X_1, \ldots, X_n)$ usamos el estimador

$$T(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{\overline{X}_{(n)}}.$$

a) Usa el método delta para obtener la distribución asintótica de T.

b) Estima, suponiendo que n es grande, $\mathbf{P}(|T - \theta| > \theta/100)$.

4. (2 puntos) Queremos contrastar la hipótesis de que una cierta moneda es equilibrada. Para ello, la lanzaremos un número n (grande) de veces y anotaremos el número de caras obtenidas.

a) Calcula explícitamente el p-valor de una muestra de tamaño $n = 621$ en la que aparece un 46 % de caras.

b) Se ha lanzado un cierto número de veces la moneda. Nos informan de que ha salido un 57 % de caras y que la hipótesis se ha rechazado con nivel de significación $\alpha = 5\,\%$. ¿Qué puedes decir de cuántas veces se lanzó la moneda?

5. (2 puntos) Sea X una variable con función de densidad

$$f(x;a) = \frac{2}{a^2}\, x \qquad \text{para } x \in [0,a]$$

(y vale 0 para el resto de valores de x). El parámetro a es > 0.

Queremos contrastar la hipótesis $H_0\colon a > 5$. Para ello, dada una muestra aleatoria de tamaño 10 de X, $(x_1, \ldots, x_{10})$, calculamos $t = \text{máx}(x_1, \ldots, x_{10})$ y rechazamos la hipótesis si $t < 4$.

Calcula la función de potencia del test y determina su nivel de significación.

Notas.

- En los casos que corresponda, pueden dejarse las respuestas en términos de Φ, la función de distribución de la normal estándar.
- Algunos percentiles de la normal estándar:

α	5 %	4.5 %	4 %	3.5 %	3 %
$z_{\alpha/2}$	1.960	2.005	2.053	2.108	2.170