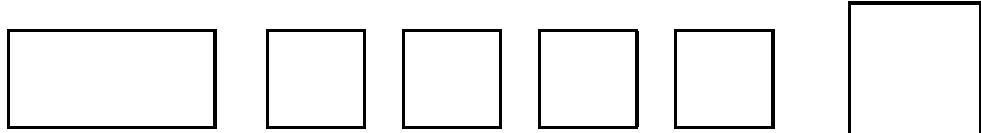


**Estadística I**  
**Tercero del grado en Matemáticas, UAM, 2014-2015**

**Examen parcial, 27-10-2014**

*Nombre y Apellidos* .....



**1.** (2 puntos)

a) Tenemos una serie de datos

<b>x</b>	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\cdots$	$x_{99}$	$x_{100}$
<b>y</b>	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$\cdots$	$y_{99}$	$y_{100}$

donde los  $y_j > 0$ . Se pretende ajustar a estos datos un modelo del tipo

$$y = \frac{1}{a + b x}.$$

¿Cómo calcularías los valores de  $a$  y  $b$ ? Describe con detalle el procedimiento.

b) Disponemos de una serie de datos  $(x_1, \dots, x_{100})$ , ya ordenados de menor a mayor, cuya media muestral es  $\bar{x}$ . Ahora formamos una nueva serie añadiendo a la anterior los valores  $x_1$  y  $x_{100}$ . ¿Qué condición se debe cumplir para que la media muestral de la nueva muestra coincida con  $\bar{x}$ , la media muestral de la muestra original?

**2.** (2 puntos) Sean  $X_1, X_2, \dots, X_{10}$  variables independientes. Cada  $X_j$  es una  $\text{EXP}(j)$ . Consideramos la variable  $T = \min(X_1, X_2, \dots, X_{10})$ . Calcula  $\mathbf{P}(T < 2)$ .

**3.** (2 puntos) Sean  $X_1, \dots, X_n$ , con  $n \geq 3$ , variables normales estándar independientes. Definimos las variables

$$\begin{aligned} Z_1 &= X_1 + X_2 \\ Z_2 &= X_2 + X_3 \\ &\vdots \\ Z_{n-1} &= X_{n-1} + X_n \\ Z_n &= X_n + X_1. \end{aligned}$$

Sabiendo que el vector  $\mathbb{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)$  sigue una normal multidimensional, determina su vector **m** de medias y su matriz **V** de varianzas/covarianzas.

**4.** (2 puntos) Sea  $X$  una variable aleatoria que toma los valores 1, 2 y 3 con probabilidades  $1/3$  cada uno de ellos. Estima (con la desigualdad de Chebyshev) la probabilidad de que, en una muestra aleatoria de  $X$  de tamaño  $n = 600$ , la media muestral esté entre 1.9 y 2.1.

5. (2 puntos) Sea  $(X_1, \dots, X_9)$  una muestra aleatoria de una variable  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . Calcula

$$\text{a) } \mathbf{P}(\overline{X} > \mu + \sigma/2, |S^2 - \sigma^2| > \sigma^2/2) \quad \text{b) } \mathbf{P}(\overline{X} > \mu + \sigma/2 \mid |S^2 - \sigma^2| > \sigma^2/2)$$

(la coma en el primer caso significa que suceden ambas cosas a la vez, el símbolo “|” del segundo significa “condicionado a”; puedes dejar escritas las respuestas en términos de  $\Phi$ , la función de distribución de la normal estándar, y/o de la función de distribución de una  $\chi^2$ ).

---

### Notas.

- Momentos de una variable  $X$  normal estándar:  $\mathbf{E}(X) = 0$ ,  $\mathbf{E}(X^2) = 1$ ,  $\mathbf{E}(X^3) = 0$ ,  $\mathbf{E}(X^4) = 3$ .
- Función de densidad de  $Z \sim \chi_n^2$ :

$$f_Z(t) = \frac{1}{\Gamma(n/2)} \frac{1}{2^{n/2}} t^{n/2-1} e^{-t/2} \quad \text{para } t > 0.$$

Media  $\mathbf{E}(Z) = n$ , varianza  $\mathbf{V}(Z) = 2n$ .

- Definición de los estadísticos media muestral y cuasivarianza muestral para una muestra aleatoria de tamaño  $n$  de una variable  $X$ :

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2.$$

- Funciones de densidad y de distribución de una variable  $X \sim \text{EXP}(\lambda)$ , con  $\lambda > 0$ :

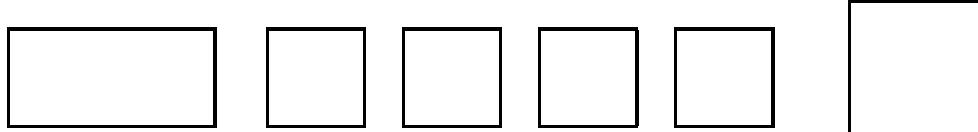
$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0; \quad F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

Media  $\mathbf{E}(X) = 1/\lambda$ , varianza  $\mathbf{V}(X) = 1/\lambda^2$ .

**Estadística I**  
**Tercero del grado en Matemáticas, UAM, 2014-2015**

**Examen parcial, 27-10-2014**

*Nombre y Apellidos* .....



**1.** (2 puntos)

a) Tenemos una serie de datos

<b>x</b>	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_{99}$	$x_{100}$
<b>y</b>	$y_1$	$y_2$	$y_3$	...	$y_{99}$	$y_{100}$

Se pretende ajustar a estos datos un modelo del tipo

$$y = a - bx^3$$

¿Cómo calcularías los valores de  $a$  y  $b$ ? Describe con detalle el procedimiento.

b) Disponemos de una serie de datos emparejados  $((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n))$ . Los datos  $x_i$  tienen media  $\bar{x}$  y los datos  $y_i$  tienen media  $\bar{y}$ . Añadimos a la serie anterior un dato más, la pareja  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Determina si la covarianza de la nueva serie es mayor, menor o igual que la covarianza de la serie original.

**2.** (2 puntos) Sean  $U_1, U_2, \dots, U_{10}$  variables independientes. Para  $j = 1, \dots, 10$ ,  $U_j$  es una  $\text{UNIF}(0, j/10)$ . Consideramos la variable  $T = \max(U_1, U_2, \dots, U_{10})$ . Calcula  $\mathbf{P}(T < 1/2)$ .

**3.** (2 puntos) Sean  $X_1, \dots, X_n$ , con  $n \geq 3$ , variables normales independientes de media 0 y varianza  $\sigma^2$ . Definimos las variables

$$\begin{aligned} Z_1 &= X_1 - X_2 \\ Z_2 &= X_2 - X_3 \\ &\vdots \\ Z_{n-1} &= X_{n-1} - X_n \\ Z_n &= X_n - X_1. \end{aligned}$$

Sabiendo que el vector  $\mathbb{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)$  sigue una normal multidimensional, determina su vector  $\mathbf{m}$  de medias y su matriz  $\mathbf{V}$  de varianzas/covarianzas.

**4.** (2 puntos) Sea  $X$  una variable  $\text{EXP}(\lambda)$ , con  $\lambda > 0$ . Estima (con la desigualdad de Chebyshev) el mínimo número de muestras  $n$  necesario para asegurar que, con probabilidad mayor del 90%,  $|\bar{X} - 1/\lambda|$  sea menor que 10%/ $\lambda$ .

5. (2 puntos) Sea  $(X_1, \dots, X_9)$  una muestra aleatoria de una variable  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . Calcula

$$\text{a) } \mathbf{P}\left(|S^2 - \sigma^2| > \sigma^2/2, \bar{X} > \mu + \sigma/2\right) \quad \text{b) } \mathbf{P}\left(|S^2 - \sigma^2| > \sigma^2/2 \mid \bar{X} > \mu + \sigma/2\right)$$

(la coma en el primer caso significa que suceden ambas cosas a la vez, el símbolo “|” del segundo significa “condicionado a”; puedes dejar escritas las respuestas en términos de  $\Phi$ , la función de distribución de la normal estándar, y/o de la función de distribución de una  $\chi^2$ ).

---

### Notas.

- Momentos de una variable  $X$  normal estándar:  $\mathbf{E}(X) = 0$ ,  $\mathbf{E}(X^2) = 1$ ,  $\mathbf{E}(X^3) = 0$ ,  $\mathbf{E}(X^4) = 3$ .
- Función de densidad de  $Z \sim \chi_n^2$ :

$$f_Z(t) = \frac{1}{\Gamma(n/2)} \frac{1}{2^{n/2}} t^{n/2-1} e^{-t/2} \quad \text{para } t > 0.$$

Media  $\mathbf{E}(Z) = n$ , varianza  $\mathbf{V}(Z) = 2n$ .

- Definición de los estadísticos media muestral y cuasivarianza muestral para una muestra aleatoria de tamaño  $n$  de una variable  $X$ :

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

- Funciones de densidad y de distribución de una variable  $X \sim \text{EXP}(\lambda)$ , con  $\lambda > 0$ :

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0; \quad F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

Media  $\mathbf{E}(X) = 1/\lambda$ , varianza  $\mathbf{V}(X) = 1/\lambda^2$ .