Estadística I
Tercero del grado en Matemáticas, UAM, 2014-2015

Examen parcial, 27-10-2014

Nombre y Apellidos ....

1. (2 puntos)

a) Tenemos una serie de datos

x	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_{99}	x_{100}
y	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_{99}	y_{100}

donde los $y_j > 0$. Se pretende ajustar a estos datos un modelo del tipo

$$y = \frac{1}{a + b\,x}.$$

¿Cómo calcularías los valores de a y b? Describe con detalle el procedimiento.

b) Disponemos de una serie de datos $(x_1, \dots, x_{100})$, ya ordenados de menor a mayor, cuya media muestral es $\bar{x}$. Ahora formamos una nueva serie añadiendo a la anterior los valores x_1 y x_{100}. ¿Qué condición se debe cumplir para que la media muestral de la nueva muestra coincida con $\bar{x}$, la media muestral de la muestra original?

2. (2 puntos) Sean $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ variables independientes. Cada X_j es una $\text{EXP}(j)$. Consideramos la variable $T = \text{mín}(X_1, X_2, \dots, X_{10})$. Calcula $\mathbf{P}(T < 2)$.

3. (2 puntos) Sean $X_1, \dots, X_n$, con $n \geq 3$, variables normales estándar independientes. Definimos las variables

$$\begin{aligned} Z_1 &= X_1 + X_2 \\ Z_2 &= X_2 + X_3 \\ &\vdots \\ Z_{n-1} &= X_{n-1} + X_n \\ Z_n &= X_n + X_1. \end{aligned}$$

Sabiendo que el vector $\mathbb{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)$ sigue una normal multidimensional, determina su vector $\mathbf{m}$ de medias y su matriz $\mathbf{V}$ de varianzas/covarianzas.

4. (2 puntos) Sea X una variable aleatoria que toma los valores 1, 2 y 3 con probabilidades 1/3 cada uno de ellos. Estima (con la desigualdad de Chebyshev) la probabilidad de que, en una muestra aleatoria de X de tamaño $n = 600$, la media muestral esté entre 1.9 y 2.1.

5. (2 puntos) Sea $(X_1, \ldots, X_9)$ una muestra aleatoria de una variable $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Calcula

a) $\mathbf{P}\Big(\overline{X} > \mu + \sigma/2\,,\, |S^2 - \sigma^2| > \sigma^2/2\Big)$ b) $\mathbf{P}\Big(\overline{X} > \mu + \sigma/2 \,\Big|\, |S^2 - \sigma^2| > \sigma^2/2\Big)$

(la coma en el primer caso significa que suceden ambas cosas a la vez, el símbolo "|" del segundo significa "condicionado a"; puedes dejar escritas las respuestas en términos de Φ, la función de distribución de la normal estándar, y/o de la función de distribución de una χ^2).

Notas.

- Momentos de una variable X normal estándar: $\mathbf{E}(X) = 0$, $\mathbf{E}(X^2) = 1$, $\mathbf{E}(X^3) = 0$, $\mathbf{E}(X^4) = 3$.
- Función de densidad de $Z \sim \chi^2_n$:

$$f_Z(t) = \frac{1}{\Gamma(n/2)} \frac{1}{2^{n/2}} t^{n/2-1} e^{-t/2} \qquad \text{para } t > 0.$$

  Media $\mathbf{E}(Z) = n$, varianza $\mathbf{V}(Z) = 2n$.
- Definición de los estadísticos media muestral y cuasivarianza muestral para una muestra aleatoria de tamaño n de una variable X:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\,, \qquad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

- Funciones de densidad y de distribución de una variable $X \sim \text{EXP}(\lambda)$, con $\lambda > 0$:

$$f_X(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0; \qquad F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

  Media $\mathbf{E}(X) = 1/\lambda$, varianza $\mathbf{V}(X) = 1/\lambda^2$.

Estadística I
Tercero del grado en Matemáticas, UAM, 2014-2015

Examen parcial, 27-10-2014

Nombre y Apellidos ....

1. (2 puntos)

a) Tenemos una serie de datos

x	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_{99}	x_{100}
y	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_{99}	y_{100}

Se pretende ajustar a estos datos un modelo del tipo

$$y = a - bx^3$$

¿Cómo calcularías los valores de a y b? Describe con detalle el procedimiento.

b) Disponemos de una serie de datos emparejados $((x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots, (x_n, y_n))$. Los datos x_i tienen media $\bar{x}$ y los datos y_i tienen media $\bar{y}$. Añadimos a la serie anterior un dato más, la pareja $(\bar{x}, \bar{y})$. Determina si la covarianza de la nueva serie es mayor, menor o igual que la covarianza de la serie original.

2. (2 puntos) Sean $U_1, U_2, \dots, U_{10}$ variables independientes. Para $j = 1, \dots, 10$, U_j es una $\textsc{unif}(0, j/10)$. Consideramos la variable $T = \text{máx}(U_1, U_2, \dots, U_{10})$. Calcula $\mathbf{P}(T < 1/2)$.

3. (2 puntos) Sean $X_1, \dots, X_n$, con $n \geq 3$, variables normales independientes de media 0 y varianza σ^2. Definimos las variables

$$\begin{aligned} Z_1 &= X_1 - X_2 \\ Z_2 &= X_2 - X_3 \\ &\vdots \\ Z_{n-1} &= X_{n-1} - X_n \\ Z_n &= X_n - X_1. \end{aligned}$$

Sabiendo que el vector $\mathbb{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)$ sigue una normal multidimensional, determina su vector $\mathbf{m}$ de medias y su matriz $\mathbf{V}$ de varianzas/covarianzas.

4. (2 puntos) Sea X una variable $\textsc{exp}(\lambda)$, con $\lambda > 0$. Estima (con la desigualdad de Chebyshev) el mínimo número de muestras n necesario para asegurar que, con probabilidad mayor del $90\,\%$, $|\overline{X} - 1/\lambda|$ sea menor que $10\,\%/\lambda$.

5. (2 puntos) Sea $(X_1, \ldots, X_9)$ una muestra aleatoria de una variable $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Calcula

a) $\mathbf{P}\Big(|S^2 - \sigma^2| > \sigma^2/2\,,\, \overline{X} > \mu + \sigma/2\Big)$ b) $\mathbf{P}\Big(|S^2 - \sigma^2| > \sigma^2/2\,\Big|\,\overline{X} > \mu + \sigma/2\Big)$

(la coma en el primer caso significa que suceden ambas cosas a la vez, el símbolo "|" del segundo significa "condicionado a"; puedes dejar escritas las respuestas en términos de Φ, la función de distribución de la normal estándar, y/o de la función de distribución de una χ^2).

Notas.

- Momentos de una variable X normal estándar: $\mathbf{E}(X) = 0$, $\mathbf{E}(X^2) = 1$, $\mathbf{E}(X^3) = 0$, $\mathbf{E}(X^4) = 3$.
- Función de densidad de $Z \sim \chi^2_n$:

$$f_Z(t) = \frac{1}{\Gamma(n/2)}\,\frac{1}{2^{n/2}}\,t^{n/2-1}\,e^{-t/2} \qquad \text{para } t > 0.$$

  Media $\mathbf{E}(Z) = n$, varianza $\mathbf{V}(Z) = 2n$.
- Definición de los estadísticos media muestral y cuasivarianza muestral para una muestra aleatoria de tamaño n de una variable X:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\,, \qquad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

- Funciones de densidad y de distribución de una variable $X \sim \textsc{exp}(\lambda)$, con $\lambda > 0$:

$$f_X(x) = \lambda\,e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0; \qquad F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

  Media $\mathbf{E}(X) = 1/\lambda$, varianza $\mathbf{V}(X) = 1/\lambda^2$.