Probabilidad y Estadística
Segundo del grado en Telecomunicaciones, UAM, 2014-2015

Examen de la convocatoria extraordinaria, 22-6-2015

Nombre y apellidos ....

1. El arquero A acierta un 95 % de las veces en el centro de la diana. El porcentaje de acierto de B es del 85 %, y el de C, del 60 %.

Elegimos a uno de los tres arqueros con el siguiente procedimiento: se lanza un dado regular; si sale 1, 2 o 3, elegimos a A; si sale 4 o 5, a B; y si sale 6, a C.

Se pide al arquero elegido que lance una flecha.

a) Calcula la probabilidad de que el arquero elegido acierte en el centro de la diana.

b) Sabiendo que el arquero elegido no ha acertado en el centro de la diana, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido C?

2. Una diana circular tiene radio 1. El centro de la diana es un círculo de radio $1/10$. Lanzamos dardos a ciegas, de manera que pueden caer en cualquier punto de la diana con igual probabilidad (eso sí, todos los lanzamientos caen en la diana).

Calcula la probabilidad de que, tras 100 lanzamientos, hayamos dado, como mucho, una vez en el centro de la diana.

(*Nota*: el área de un círculo de radio R es $\pi\, R^2$.)

3. La función de masa conjunta de dos variables X e Y viene dada en la siguiente tabla:

	$Y=0$	$Y=1$
$X=-1$	c	$4c$
$X=0$	$2c$	$8c$
$X=1$	$3c$	$12c$

a) Calcula el valor de c.

b) Calcula $\mathbf{P}(X<Y)$ y $\mathbf{E}(X)$.

c) Decide y justifica si las variables X e Y son independientes o no.

4. El vector aleatorio (X, Y) tiene función de densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } -1 \le x \le 1 \text{ y } 0 \le y \le 1; \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Calcula $\mathbf{P}(Y > X^2)$.

5. Una sonda espacial está enviando cuatro fotografías por segundo a un servidor en la Tierra. El tamaño (en megabytes) de cada fotografía sigue una normal de media $\mu = 4$ y desviación típica $\sigma = 0.5$.

El servidor de la Tierra se bloquea si recibe más de 18 megabytes por segundo.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se bloquee en el envío del primer segundo?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que *no* se bloquee durante el primer minuto?

6. En cada partida de un determinado juego podemos obtener los siguientes premios: 0 euros con probabilidad 30 %, 1 euro con probabilidad 60 %, y 2 euros con probabilidad del 10 %. Jugamos 400 partidas seguidas.

a) Calcula cuál es el beneficio medio que obtendremos (en las 400 partidas).

b) Calcula la probabilidad de que acabemos las partidas con más de 340 euros.

7. La variable X tiene función de densidad

$$f(x) = \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}\, e^{-\alpha x^2/2} \qquad \text{para } x \geq 0.$$

Aquí, α es un parámetro positivo.

Disponemos de una muestra $x_1, \ldots, x_{100}$ de la variable X. Estima α por máxima verosimilitud a partir de esa muestra.

8. Se sabe que el número de letruges por cm^3 en el río Turia sigue una Poisson de parámetro λ. Se han obtenido 40 muestras (independientes) de 1 cm^3 y se ha anotado el número de letruges en cada muestra, con los siguientes resultados: el promedio es de 3.6 letruges, y la cuasidesviación típica muestral es de 1.7 letruges.

Da un intervalo de confianza al $1\,\%$ para el parámetro λ.

9. Recibimos una muestra de 1000 números. De ellos, 158 son menores o iguales que -1, otros 341 están en el intervalo $(-1, 0]$, 327 están en $(0, 1]$, y los restantes 174 son mayores que 1.

Se pide contrastar, con un nivel de significación $\alpha = 5\,\%$, si esas muestras han sido generadas a partir de una normal $\mathcal{N}(0, 1)$.

10. Para estudiar la densidad de Sanecrab en las aguas del Turia y del Júcar, se han tomado dos muestras: en la del Turia, de tamaño 11, se ha obtenido una media muestral de 16 y una cuasidesviación típica 1.2. En la muestra del Júcar, de tamaño 7, se ha obtenido una media muestral de 14 y una cuasidesviación típica 1.

¿Se puede concluir, al nivel $\alpha = 5\,\%$, que hay diferencia entre las densidades (medias) de Sanecrab en los dos ríos?

(Se supone normalidad e igualdad de varianzas).

Notas y comentarios

- Se admiten respuestas en términos de $\Phi(x)$, la función de distribución de la normal estándar. En todo caso, éstos son algunos valores explícitos: $\Phi(-1) = 0.159$, $\Phi(0) = 0.5$, $\Phi(1) = 0.841$, $\Phi(5/3) = 0.952$ y $\Phi(2) = 0.977$.
- Usa fracciones (en los cálculos).
- Una variable X $\text{BIN}(n, p)$, con n entero positivo y $0 < p < 1$, toma valores $0, 1, \ldots, n$, con probabilidades $\mathbf{P}(X = j) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$. Además, $\mathbf{E}(X) = np$ y $\mathbf{V}(X) = np(1-p)$.
- Percentiles de la χ^2 con n grados de libertad ($n = 1, \ldots, 12$), $\alpha = 5\,\%$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\chi^2_{\{n;5\,\%\}}$	3.84	5.99	7.81	9.49	11.07	12.59	14.07	15.51	16.92	18.31	19.68	21.03

- Percentiles de la t de Student con n grados de libertad ($n = 10, \ldots, 20$), $\alpha = 2.5\,\%$:

n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$t_{\{n;2.5\,\%\}}$	2.228	2.201	2.179	2.160	2.145	2.131	2.120	2.110	2.101	2.093	2.086

- Algunos valores de percentiles de la normal estándar:

α	5 %	4.5 %	4.0 %	3.5 %	3.0 %	2.5 %	2.0 %	1.5 %	1.0 %	0.5 %
z_α	1.64	1.70	1.75	1.81	1.88	1.96	2.05	2.17	2.33	2.58