Estadística I
Tercero del grado en Matemáticas, UAM, 2018-2019

Examen de la convocatoria extraordinaria, 14-6-2019

Ejercicio 1. (2 puntos) Consideramos una muestra aleatoria (X_1, X_2, X_3, X_4) de tamaño 4 de una variable $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, con $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 2$.

a) Definimos el vector aleatorio $\mathbb{Z} = (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)^\intercal$ dado por

$$\begin{cases} Z_1 = X_1 + X_2 \\ Z_2 = X_1 - 2X_2 + X_3 \\ Z_3 = X_2 + X_3 \\ Z_4 = -X_2 + X_4 \end{cases}$$

Calcula

$$\mathbf{V}(Z_2), \qquad \mathbf{V}(Z_1 + Z_2) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{cov}(Z_1, Z_2).$$

b) Seguimos considerando las variables (X_1, X_2, X_3, X_4) y (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) del apartado anterior.

Considera las siguientes variables aleatorias:

$$A = \frac{Z_1 + Z_3 + Z_4}{4} \qquad \text{y} \qquad B = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4}(X_i - \overline{X})^2.$$

Calcula la probabilidad de que ocurra, o bien que $|A| < 1/5$, o bien que $B < 2$.

Ejercicio 2. (3 puntos) La variable X toma valores 0, 1, 2 y 3 con probabilidades p, $2p$, $2p$ y $1 - 5p$. Aquí, p es un parámetro, con $p \in (0, 1/5)$.

Para muestras aleatorias de tamaño n de X, se consideran dos estimadores de p:

- $T_1 = (3 - \overline{X})/9$, donde $\overline{X}$ es la media muestral;
- T_2 es el promedio de ceros en la muestra.

a) Comprueba que ambos estimadores son insesgados.

b) Determina cuál de los dos es más eficiente.

c) Calcula la cota de Cramér–Rao para la varianza de estimadores insesgados de p con muestras aleatorias de X de tamaño n. ¿Es alguno de los estimadores anteriores (T_1 y T_2) de mínima varianza?

Ejercicio 3. (2 puntos) Queremos construir intervalos de confianza para el parámetro $p \in (0,1)$ con muestras aleatorias de tamaño n de una variable $X \sim \text{BER}(p)$. Sea $\overline{X}$ la variable media muestral (para muestras de tamaño n).

a) Obtén un resultado de normalidad asintótica para la variable

$$T = \frac{\overline{X} - p}{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}}.$$

b) Utiliza el resultado anterior para construir un intervalo de confianza (aproximadamente) $1-\alpha$ para p cuando n es muy grande.

Ejercicio 4. (1 punto) Disponemos de una muestra aleatoria $(x_1, \dots, x_{75})$ de tamaño 75 de una variable X que sigue una normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, donde $\sigma^2 = 25$. Aquí, μ es un parámetro desconocido.

Los datos de la muestra se han tomado en dos etapas: primero 50, y luego 25. Nos informan de que

- la media muestral de los primeros 50 datos es 13, y la cuasidesviación típica muestral, 5.3;
- la media muestral de los otros 25 datos es 15, y la cuasidesviación típica muestral, 6.1.

¿Aporta la muestra (completa) suficiente evidencia estadística como para concluir que el valor de μ es menor que 15? Justifica tu respuesta usando p-valores.

Ejercicio 5. (2 puntos) En este ejercicio consideramos una variable X que sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda > 0$. Es decir,

$$\mathbf{P}(X = j) = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^j}{j!} \qquad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots$$

a) Dada una muestra aleatoria $(x_1, \dots, x_n)$ de X, halla la estimación por máxima verosimilitud del parámetro λ.

b) Se desea contrastar la hipótesis

$$H_0 : \lambda < 1$$

utilizando muestras aleatorias $(x_1, \dots, x_5)$ de X de tamaño 5.

Para ello, se diseña el siguiente test: si en la muestra (de tamaño 5) hay algún valor que sea ≥ 4, entonces se rechaza H_0.

Halla la función de potencia del test, y deduce (justificadamente) su nivel de significación.

Algunos valores de percentiles de la normal estándar y de la t de Student con 74 grados de libertad:

α	5 %	4.5 %	4.0 %	3.5 %	3.0 %	2.5 %	2.0 %	1.5 %	1.0 %	0.5 %
z_α	1.645	1.695	1.751	1.812	1.881	1.960	2.054	2.170	2.326	2.576
$t_{\{74;\alpha\}}$	1.655	1.706	1.763	1.825	1.895	1.976	2.072	2.191	2.352	2.609