ALGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA
DOBLE PROGRAMA DE INFORMÁTICA–MATEMÁTICAS

Examen final (Viernes 17/01/2014. Tiempo: 3 horas)

APELLIDOS: ....

NOMBRE: .... **DNI:** ....

---

[2] **1.** Responde si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, razonando adecuadamente la respuesta (es decir, si es verdadera, demuéstrala utilizando las herramientas del curso, y si es falsa, halla un contrajemplo).

a) Si E es un espacio euclídeo y $T : E \to E$ es una aplicación autoadjunta, entonces la matriz de T en cualquier base de E es simétrica.

b) Si $\mathbb{A}$ es un espacio afín de dimensión n, y L_1 y L_2 son variedades lineales NO paralelas, con $\dim(L_1) = n-1$ y $\dim(L_2) = 1$, entonces L_1 y L_2 se cortan en un punto.

c) Toda aplicación ortogonal de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$, con el producto escalar usual, se puede escribir, en la base canónica, de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

d) Sea $f : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ una aplicación afín tal que $f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $f\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Entonces, necesariamente, $f\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

---

[2] **2.** Halla todos los planos afines de $\mathbb{A}^3$ que contengan a la recta expresada implícitamente en coordenadas canónicas por $L : \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$ y estén a distancia 2 del punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

---

[2] **3.** En $\mathbb{R}^3$, considera la forma bilineal dada por

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = (x_1 \ \ x_2 \ \ x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

a) Demostrar que f define un producto escalar.

b) Usando el producto escalar de la parte a):
Hallar la proyección ortogonal del vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sobre el subespacio generado por $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

---

[2] **4.** Halla las ecuaciones (en el sistema de referencia canónico) de los siguientes movimientos de $\mathbb{A}^3$:

a) La simetría deslizante con plano de simetría $x - z - 3 = 0$ y vector de deslizamiento $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) El movimiento helicoidal con eje $L : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ compuesto por el giro de ángulo $\pi/4$ (orientado según $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$) y el vector de desplazamiento $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

---

[2] **5.** Se considera la cónica definida por la ecuación

$$8x^2 - 4xy + 5y^2 - 24x + 24y = 0.$$

Determina qué tipo de cónica es. De los siguientes elementos geométricos, calcula aquellos que tenga la cónica: centro, vértices, ejes, focos, asíntotas. Calcula también su forma canónica y el cambio de base necesario para escribir la ecuación en forma canónica.