10.2. Coloreado de grafos

Vamos a poner algo de color en el mundo de los grafos, introduciendo un pictórico (y pintoresco) lenguaje de "coloreado de grafos" que, como veremos, resultará ser útil y práctico para, por ejemplo, abordar un buen número de cuestiones combinatorias. Advertimos cariñosamente al lector de que debe tener la precaución de escoger adecuadamente dónde y ante quién exhibe los conocimientos técnicos avanzados que va a aprender en esta sección: al fin y a la postre, la plasmación de la abstracción matemática de este lenguaje lo llevará a pintar en un papel rayas y puntos con lápices de colores, a mirarlos fijamente, a levantarse de la mesa, pensar peripatéticamente, volverse a sentar y quizás, sólo quizás, escoger un color...

Además de un grafo G, dispondremos de una *paleta de colores*, un conjunto $S = \{a, b, \dots\}$ a cuyos elementos nos referiremos como los *colores*. El uso de esta terminología proviene del coloreado de mapas, como veremos en un momento; pero en realidad qué símbolos contenga S (y de qué tipo, sean colores, números o letras) será una cuestión poco significativa.

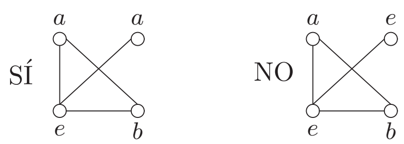
Colorear G con los colores de S consiste en asignar a cada vértice de G un elemento de S, es decir, un color, de manera que *los extremos de cada arista reciban colores distintos*. No se trata, pues, de una asignación de colores arbitraria y sin restricciones. Formalmente,

Definición 10.2.1 Una **coloración** del grafo G con colores del conjunto S es una aplicación $\gamma\colon V(G) \to S$ de forma que $\gamma(v) \neq \gamma(w)$ si $\{v, w\} \in A(G)$.

El valor $\gamma(v)$ es el color que recibe el vértice v en la coloración γ. Y colorear el grafo es la acción de crear una coloración (o coloreado) particular[26].

El lector atento habrá observado que, en realidad, deberíamos hablar de *coloreado de los vértices de un grafo*. En sintonía con el perspicaz lector, nos preguntamos por qué no colorear aristas. Se puede, claro, y la restricción natural es que aristas que concurran en un vértice han de llevar colores distintos (vea el lector interesado los ejercicios 10.2.22–10.2.26).

Por ejemplo, si tenemos el grafo G que representamos más abajo, y disponemos de la paleta de colores $S = \{a, b, c, d, e, f\}$, la asignación de colores de la izquierda es una coloración, pero no lo es la de la derecha, pues hay una arista con el mismo color e en sus dos vértices.

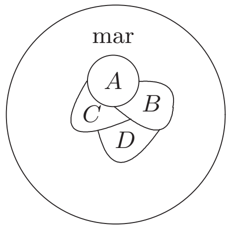


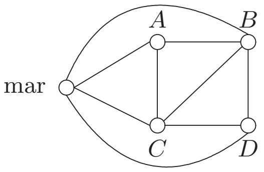
El concepto de coloración es *invariante por isomorfismo*. Es decir, si G_1 y G_2 son isomorfos y tenemos una coloración de G_1, tendremos una coloración de G_2 sin más que asignar, a cada vértice de G_2, el color que lleva el vértice de G_1 que le corresponde por el isomorfismo.

Nos interesaremos primero, con espíritu eficiente, por saber cuál es el mínimo de colores que se requieren para colorear el grafo; luego, con espíritu algorítmico, por el diseño de un procedimiento organizado para obtener coloraciones; y finalmente, con espíritu ya decididamente combinatorio, por el recuento del número de coloraciones distintas que hay. En ese orden, secciones 10.2.1, 10.2.2 y 10.2.3. Antes de entrar en faena, vienen al caso un par de reflexiones sobre la nomenclatura y la propia noción de coloreado.

[26] Perdón por la pedante insistencia.

A. Coloreado de mapas. La cromática terminología de estas sección tiene su origen en un problema clásico, conocido como el **problema de los cuatro colores**. A la derecha aparece un (sencillo) mapa formado por cuatro regiones y el mar. Queremos colorear el mapa, es decir, asignar a cada país (y también a la zona marítima) un color de manera que regiones que compartan frontera no lleven el mismo color, para que no se confundan.



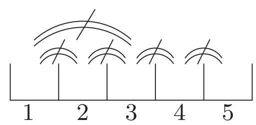


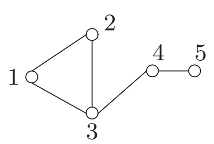
Para esta cuestión particular, basta con saber qué regiones contiene el mapa, y cuáles de ellas tienen frontera común. Información que se puede resumir en un grafo cuyos vértices son las distintas regiones, y en el que entre dos vértices habrá una arista si los países correspondientes tienen frontera en común. Dibujamos a la izquierda el grafo correspondiente al mapa anterior. Podemos colorear el mapa (o, equivalentemente, el grafo) con cinco colores, desde luego, pues hay cinco vértices. Pero también con *cuatro*, asignando por ejemplo el color azul (marino, claro) a la zona marítima, el rojo a las regiones A y D, el verde al territorio B y, finalmente, el marrón a C.

El grafo que se obtiene a partir un mapa cualquiera siguiendo el procedimiento indicado antes posee unas características muy especiales: es lo que se llama un *grafo plano*. Y lo que afirma el *teorema de los cuatro colores* es, qué otra cosa podía decir, que todo grafo plano puede colorearse utilizando a lo sumo *cuatro* colores. Una afirmación que deja pasmado: ¿sea cual sea el mapa/grafo plano? Sí, lector, da igual cuántas regiones tenga, cuán intrincadas sean sus fronteras... con cuatro basta. Si le interesa el asunto, la propia historia del teorema, y algunas de sus fascinantes conexiones, consulte la sección 10.4.

B. Listas con restricciones. Colorear un grafo (con los colores de S) es lo mismo que construir una lista (con los símbolos de S) con determinadas restricciones sobre los símbolos que se pueden emplear en sus posiciones.

Ya adelantamos parte de esta identificación en algunos ejemplos de uso de la técnica de inclusión/exclusión en el apartado 5.1.5. Considere el lector listas de cinco posiciones, en las que podemos situar símbolos de un conjunto $S = \{a, b, c, d\}$, con las restricciones que simbólicamente se representan en el primer dibujo: no puede ir el mismo símbolo en las dos primeras posiciones, tampoco en las posiciones 1 y 3, etc. Vea también cuán elegantemente quedan codificadas esas restricciones en el grafo adjunto, y observe que a cada lista de las antes descritas (formada con símbolos de S) le corresponde una coloración del grafo con los colores de S. En términos generales,





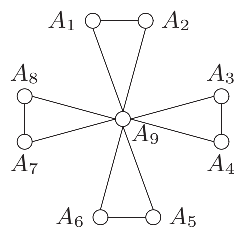
> colorear con k colores dados un grafo G con vértices $\{v_1, \dots, v_n\}$ es lo mismo que formar listas con repetición permitida de longitud n con esos mismos k símbolos (colores) de manera que si $\{v_i, v_j\} \in A(G)$, los símbolos que aparezcan en las posiciones i y j de la lista sean distintos.

Repare el lector en que la frase "colorear con k colores" anterior no implica necesariamente usarlos todos, sino que únicamente hace referencia al número de colores disponibles.

Por ejemplo, colorear el grafo lineal L_n con los colores $\{a, b, c\}$ es lo mismo que formar n-listas con repetición permitida con los símbolos $\{a, b, c\}$ de manera que en posiciones consecutivas haya símbolos distintos. Las n-listas sin repetición formadas con k símbolos ($k \geq n$) se corresponden con las coloraciones del grafo completo K_n con k colores, y las n-listas con repetición permitida con k símbolos, con las coloraciones del grafo vacío N_n con k colores.

Como ilustración, retomamos una cuestión esbozada en la introducción de este capítulo, con un ejemplo concreto.

Ejemplo 10.2.1 *En un curso de licenciatura con nueve asignaturas, $A_1, \ldots, A_9$, hay alumnos matriculados simultáneamente en las asignaturas A_1 y A_2, A_3 y A_4, A_5 y A_6 y A_7 y A_8. Además, la asignatura A_9 debe cursarse obligatoriamente. Se trata de diseñar un horario, utilizando el menor número de horas posible, que permita a todos los alumnos asistir a las clases de las asignaturas en las que esté matriculado.*



Cada horario es una lista de 9 posiciones (una por asignatura) con los símbolos que indiquen las horas a las que se imparten, y en la que se respeten las restricciones arriba indicadas. Alternativamente, si traducimos la información sobre asignaturas e incompatibilidades en el grafo en "aspas de molino" de la derecha, un horario válido es una coloración del grafo: la paleta de colores está formada por las horas disponibles, y el color que asignamos a cada vértice, la hora a la que se programa la asignatura correspondiente. Queremos usar pocos colores, los menos posibles, para que el horario resultante sea lo más económico posible. Claramente, el grafo se puede colorear con nueve colores, pero en realidad hacen falta menos: coloree el lector el grafo con tres colores, y cerciórese, adicionalmente, de que con dos colores resulta imposible. ♣

C. Particiones en bloques. Una coloración de G parte su conjunto de vértices en bloques, uno por color, de manera que no hay aristas entre vértices del mismo bloque (pues si las hubiera, no podrían llevar el mismo color). Adelantándonos un poco (al lema 10.2.3), esta interpretación alternativa nos dice, por ejemplo, que si G se puede colorear con dos colores, entonces G es *bipartito*. En general,

> colorear un grafo G con vértices $\{1, \ldots, n\}$ con *exactamente* k colores dados (es decir, usándolos todos) es lo mismo que partir el conjunto $\{1, \ldots, n\}$ en k bloques no vacíos (cada bloque lleva los vértices que van con el mismo color), de manera que cada dos elementos (vértices) de un bloque no sean vecinos en G.

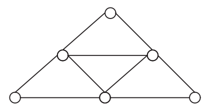
10.2.1. Coloreado eficiente: el número cromático

Como el ejemplo 10.2.1 sobre la asignación de horarios sugería, nos interesan coloraciones con poco colores... y cuantos menos, mejor.

Definición 10.2.2 El **número cromático** de un grafo G, que denotaremos por $\chi(G)$, es el mínimo número de colores necesario para colorear G.

El análisis del ejemplo 10.2.1 nos dice que el número cromático del grafo allí dibujado (el de las aspas de molino) es 3, porque lo podemos colorear con 3 colores, pero no con 2. De manera que *hacen falta y bastan* tres horas para impartir esas asignaturas sin conflictos.

Observe el lector que el número cromático es *invariante por isomorfismos*. Es decir, si G y G' son grafos isomorfos, entonces $\chi(G) = \chi(G')$. La razón es que, como ya hemos comentado, el propio isomorfismo traslada coloraciones en G en coloraciones en G'.



El grafo que aparece a la derecha es protagonista en algunas de las discusiones matemáticas de la película[27] "El indomable Will Hunting". Su número cromático es 3. Obsérvese que con únicamente dos colores no podríamos pintar los vértices de cualquiera de los "triángulos". Y el lector no encontrará dificultades para decorar los vértices con exactamente tres colores.

¿Qué podemos decir de $\chi(G)$ en un grafo G general? Primero, que en cuanto G tenga aristas, $\chi(G)$ está siempre comprendido entre 2 y el número de vértices del grafo. Veamos:

- por un lado, se tiene que $\chi(G) \leq |V(G)|$, pues una coloración siempre válida (aunque en general poco eficaz) consiste en asignar a cada vértice un color distinto;
- por otro, si el grafo contiene al menos una arista, entonces necesitaremos dos colores como mínimo. Es decir, si $|A(G)| \geq 1$, entonces $\chi(G) \geq 2$.

Complementando la segunda observación, resulta que $\chi(G) = 1$ si y sólo si G no tiene aristas, es decir, si G es un grafo vacío. Permitirá el lector que excluyamos este ejemplo de los grafos vacíos en casi todo lo que sigue.

La acotación $2 \leq \chi(G) \leq |V(G)|$ anterior será, en casi todos los casos, excesiva y poco útil. Si un grafo tiene un número cromático alto (pensará el lector) es porque el grafo en cuestión tiene muchas aristas (muchas restricciones para el coloreado), aristas que además se disponen de manera inconveniente para nuestro propósito de economizar colores. Pero puede haber grafos con muchos vértices, de grado muy alto, con muchísimas aristas, que sin embargo requieren relativamente pocos colores para su coloreado. Adelante lector unas páginas si lo desea, y vea el grafo del ejemplo 10.2.3. Aún así, si todos los vértices tienen grados bajos, entonces deberá ser coloreable con pocos colores; vea el lector una cuantificación precisa en las mejoras de la cota superior para $\chi(G)$ contenidas en las proposiciones 10.2.4 y 10.2.5.

En cualquier caso, el cálculo en sí del número cromático de un grafo general es un asunto delicado, y está considerado como un problema computacionalmente difícil.

Sin embargo, en muchos casos de interés[28], seremos capaces de calcular números cromáticos, apoyándonos en observaciones como las dos siguientes, y en algunas otras que irán apareciendo más adelante.

Supongamos que G' es un subgrafo de G. Si ése es el caso, cualquier coloración de los vértices de G sirve también como coloración de los de G', porque en G' hay, en principio, menos restricciones. De manera que si podemos colorear los vértices de G con, digamos, 10 colores, este número de colores bastará para colorear los vértices de G'. Es decir, que

- si un grafo G contiene a G' como *subgrafo*, entonces $\chi(G) \geq \chi(G')$.

[27] *Good Will Hunting*, el título original de la película dirigida por Gus van Sant en 1997, es la historia de un huérfano (interpretado por Matt Damon) con personalidad conflictiva pero con un talento natural para las matemáticas. Damon y (Ben) Affleck fueron los autores del guión, ganador de un Oscar.

[28] Y desde luego en todas las ilustraciones que irán apareciendo, ¡sólo faltaba!

Esta observación permite a veces mejorar la cota inferior y un tanto trivial $\chi(G) \geq 2$ buscando en G subgrafos con números cromáticos ya conocidos o estimables de cierta manera.

Por otro lado, para las cuestiones relacionadas con números cromáticos podemos restringirnos al caso de los grafos conexos. La razón es que, como no hay aristas que conecten vértices de componentes conexas distintas, las coloraciones de las distintas componentes conexas de un grafo son independientes. Más concretamente,

- si G tiene k *componentes conexas*, $G_1, G_2, \ldots, G_k$, cuyos números cromáticos son los números $\chi(G_1), \chi(G_2), \ldots, \chi(G_k)$ respectivamente, entonces

$$\chi(G) = \max_{1 \leq i \leq k} \{\chi(G_i)\}$$

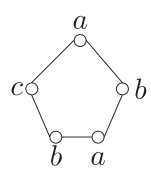
Por un lado, como para colorear G necesitaremos al menos tantos colores como los requeridos para colorear la componente de mayor número cromático, $\chi(G) \geq \max_{1\leq i\leq k} \{\chi(G_i)\}$. En el otro sentido, suponiendo que ya hemos evaluado los números cromáticos de cada componente y que por tanto tenemos $\max_{1\leq i\leq k} \{\chi(G_i)\}$, basta observar que con este número de colores podremos colorear la componente conexa más “difícil”; y desde luego las restantes, que en principio requieren menos colores.

Algunas familias de grafos y sus números cromáticos. Vamos ahora a entretenernos con el cálculo de los números cromáticos para los grafos más habituales. La verificación de que un cierto número de colores es número cromático siempre supone dos pasos. Primero, se comprueba que es posible colorear con ese número de colores, para después argumentar que no se puede hacer con menos colores.

El *grafo vacío* con n vértices N_n es, como ya hemos comentado, bastante especial, pues se puede colorear con un único color: $\chi(N_n) = 1$. Y recíprocamente: si un grafo se puede colorear con un sólo color, entonces es un grafo vacío.

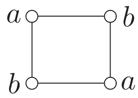
Para el *grafo completo* K_n con $n \geq 1$ vértices, necesitamos tantos colores como vértices, porque al tener todas las aristas posibles, cuando asignamos un color a un vértice ya no lo podemos utilizar de nuevo. Así que $\chi(K_n) \geq n$. Como además el número cromático de un grafo no puede ser mayor que su número de vértices, $\chi(K_n) \leq n$. De donde deducimos que $\chi(K_n) = n$. Esto nos dice, de paso, que si un grafo G contiene a un K_l como subgrafo, entonces $\chi(G) \geq l$. En el grafo de Will Hunting, recordemos, la presencia de triángulos (grafos completos K_3) permitía decidir que al menos tres colores eran necesarios.

El análisis del caso del *grafo lineal* L_n con $n \geq 2$ vértices es también directo: por un lado, se puede colorear con dos colores, como se muestra en la figura. Pero además, como hay al menos una arista, $\chi(L_n) \geq 2$. Por tanto, $\chi(L_n) = 2$ si $n \geq 2$.



Consideremos ahora el *grafo circular* C_n, con $n \geq 3$. Resulta conveniente distinguir entre que n sea par o impar. Ilustremos el caso impar con $n = 5$ (el caso $n = 3$ ya lo hemos visto en los grafos completos). Por un lado, podemos colorearlo con tres colores (véase el dibujo de la derecha). Y con dos colores no se puede, simplemente porque la secuencia $a - b - a - b - a$ no encaja (obsérvese que empezamos y acabamos con a). Extienda el lector el argumento para deducir que $\chi(C_n) = 3$ si n es impar.

Ilustramos el caso par, algo más sencillo, con el "cuadrado", C_4. Véase, en el dibujo de la derecha, una coloración con dos colores. Pero como éste es el valor mínimo que puede tener el número cromático (pues hay aristas), $\chi(C_4) = 2$. Un argumento análogo prueba que $\chi(C_n) = 2$ si n es par.



En cuanto a los grafos bipartitos, se deben (y pueden) poder colorear con dos colores. Vale la pena elevar esta observación, y ponerla en paralelo a la caracterización que vimos en el lema 9.1.12 en términos de ausencia de ciclos de orden impar:

Lema 10.2.3 *$\chi(G) = 2$ si y sólo si G es un grafo bipartito (no vacío).*

DEMOSTRACIÓN. Si $\chi(G) = 2$, entonces existe una coloración del grafo con dos colores, que define los dos conjuntos de vértices del grafo bipartito. En el sentido contrario, si G es bipartito, no vacío, y U y V son los dos conjuntos de vértices, entonces G se puede colorear con dos colores (de rojo los de U y de azul los de V, por ejemplo); y con menos no se puede. (Note, lector, que atendiendo a su definición, un grafo vacío es bipartito pero tienen numero cromático 1). ■

Como ejemplos destacados, tenemos los grafos bipartitos completos $K_{r,s}$, con $r, s \geq 1$, o el grafo del cubo Q_n, para $n \geq 2$ (recuerde el lector el final de la discusión del final de la sección 9.1.3). También los árboles y los bosques tienen número cromático 2, salvo el caso trivial del árbol con un único vértice.

10.2.2. Algoritmo austero de coloreado

Proseguimos nuestro análisis abandonando por un momento las cuestiones de economía de coloreado para centrarnos en el coloreado en sí. Tenemos la paleta de colores y un grafo frente a nosotros: ¿cómo podemos colorearlo? ¡Déjeme a mí!, dirá algún lector entusiasta, que acto seguido se pondrá a colorear un vértice, luego pasará a otro, mirando si el anterior es vecino, por si tuviera que evitar el uso de algún color, luego a otro... Vale, es algo así, pero se trata de ser sistemáticos. ¡Déjeme a mí!, clamará otro lector, que con sonrisa pícara se limitará a pintar cada vértice de un color distinto. Vale, pero se trata de ser económico.

Vamos a describir un procedimiento general que permite colorear un grafo $G = (V, A)$ con $|V| = n$, dada una paleta de colores S, con el firme propósito de ser sistemáticos (y algorítmicos), y con el anhelo declarado de, con suerte, resultar económicos.

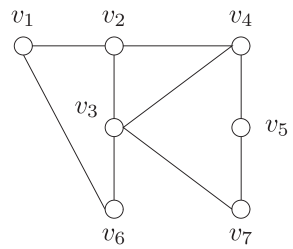
En principio, no limitaremos el número de colores que están a nuestra disposición, y además, para fijar el procedimiento, supondremos que la paleta está ordenada: $S = (a, b, \dots)$. El procedimiento, que llamaremos[29] **algoritmo austero**, consta de los siguientes pasos:

[29] En la bibliografía anglosajona se denomina *greedy algorithm*, que se podría traducir por algoritmo voraz, acaparador, avaricioso... En francés, por cierto, se usa *glouton*, que suponemos no necesita traducción. Medite el lector, si lo desea, al respecto de posibles diferencias culturales. El término que hemos elegido aquí, "austero", pretende reflejar cómo el algoritmo va eligiendo, en cada paso, la opción más económica, hasta conseguir la coloración completa.

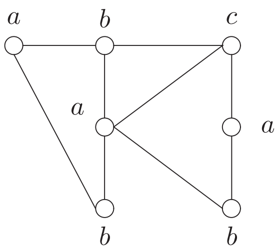
→ **Paso inicial de ordenación**. Ordenamos los vértices del grafo, esto es, los disponemos en una lista $(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Advertimos ya de que el resultado del algoritmo, por ejemplo el número de colores que emplea, depende de la ordenación elegida.

→ **Asignación de colores**. Ahora coloreamos los vértices siguiendo esa ordenación.

- *Primer paso*: a v_1 le asignamos el primer color disponible, a.
- *Segundo paso*: si v_2 es vecino de v_1, le asignamos el color b; si no lo es, le asignamos a.
- *Tercer paso*: para colorear v_3, comprobamos si es vecino de v_1 ó v_2; y no podremos utilizar el color o colores que hayamos utilizado en los que sean vecinos suyos.
- *k-ésimo paso*: ya hemos coloreado los vértices $(v_1, \dots, v_{k-1})$. De la paleta de colores excluimos los colores usados en los *vecinos de v_k que ya hayan sido coloreados*; de los colores que quedan, elegimos para v_k el primero disponible.



Vemos el algoritmo en acción con el grafo de la derecha, en el que ya hemos asignado un cierto orden a los vértices. En el primer paso, a v_1 le asignamos el color a. Para colorear v_2 no podemos utilizar el color a, pues v_2 es vecino de v_1 (que ya lleva color a). Así que de la paleta tachamos a, $(\cancel{a}, b, c, d, \dots)$ y nos quedamos con el color b. El vértice v_3 sólo tiene un vecino que ya haya sido coloreado, el v_2 con b: $(a, \cancel{b}, c, d, \dots)$, y escogemos a.



El procedimiento se repite con los demás vértices. Para v_4 hay disponibles $(\cancel{a}, \cancel{b}, c, d, \dots)$, así que escogemos c. Para v_5 hay disponibles $(a, b, \cancel{c}, d, \dots)$, de manera que escogemos a. Para v_6 hay disponibles $(\cancel{a}, b, c, d, \dots)$, por lo que escogemos b. Llegados al vértice v_7, nos encontramos con $(\cancel{a}, b, c, d, \dots)$, de forma que escogemos b. Exhibimos, a la izquierda de estas líneas, la coloración obtenida. Observemos que el algoritmo austero ha producido una coloración con tres colores, que es el mínimo posible, esto es, el número cromático, pues el grafo contiene ciclos de longitud impar.

El algoritmo austero toma como datos de entrada un grafo G y una paleta de colores y produce una coloración de (los vértices de) G. Nos preguntamos ahora si es realmente eficaz. Por ejemplo, si permite colorear G con el mínimo número de colores posible, $\chi(G)$.

Resulta que sí. Ahí va el argumento que lo justifica. Si el número cromático de G es $\chi(G) = k$ es porque puede ser coloreado con exactamente k colores. Una tal coloración divide sus vértices en k bloques: los que van "de rojo", los que van "de azul", etc., de manera que no hay aristas entre vértices que estén en el mismo bloque. Ordene ahora el lector los vértices del grafo de la siguiente manera: primero, los del primer bloque (los "de rojo"), etiquetados del 1 hasta el número de vértices que haya en el bloque; dentro de ese bloque, ordénelos como le plazca. Ordene luego los del segundo bloque, de nuevo como quiera, luego pase a los del tercero, etc. Hecho esto, aplique el algoritmo austero a *esta* ordenación, y compruebe que se utilizan exactamente k colores.

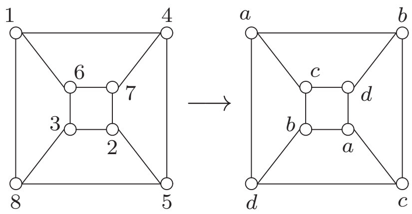
Pero lector, observe que la ordenación de los vértices del argumento anterior, tan eficaz ella, viene dictada por una coloración óptima, que es justo lo que pretendemos obtener del algoritmo. Así que el argumento es pura prestidigitación[30]: una óptima ordenación. . . *haberla, hayla*, pero no hay manera de saber cuál es.

Bueno, en realidad sí que hay un procedimiento para obtener la ordenación óptima (o una de ellas), que consiste en considerar cada una de las posibles y aplicar una y otra vez el algoritmo austero, hasta encontrar la fetén. Pero si el grafo tiene n vértices, hay $n!$ posibles ordenaciones y, a estas alturas, ya sabemos que. . .

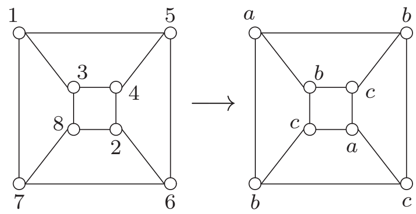
En los dos ejemplos que siguen se aprecia cuán sensible puede ser el algoritmo, en términos de eficacia, a la ordenación de vértices elegida.

Ejemplo 10.2.2 *Consideremos el grafo del cubo Q_3.*

Recordemos que Q_3 es un grafo bipartito, y que por tanto su número cromático es 2. Para las dos siguientes ordenaciones, el algoritmo austero utiliza:

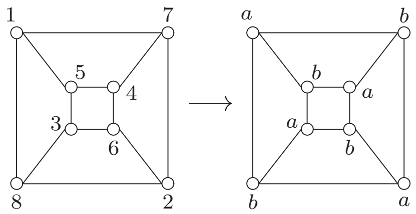


4 colores



3 colores

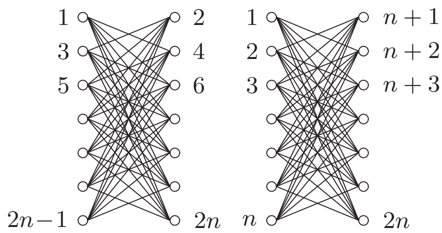
Aunque para la siguiente ordenación de vértices el algoritmo austero es todavía más eficaz, pues utiliza únicamente 2 colores, el mínimo posible:



♣

Ejemplo 10.2.3 *Consideremos un grafo bipartito con $2n$ vértices en el que cada vértice de la izquierda está unido a todos los de la derecha excepto al que se sitúa justo enfrente.*

A la derecha exhibimos dos posibles ordenaciones de los vértices. Para la primera ordenación (impares para los vértices de la izquierda, pares para los de la derecha), el algoritmo austero utiliza n colores, como el lector puede comprobar sin esfuerzo. Para la segunda ordenación, sin embargo, el algoritmo sólo emplea dos colores, que por cierto es el mejor resultado posible, pues el número cromático del grafo es 2. La diferencia entre una y otra ordenación es enorme, si tomamos n muy grande. ♣



Aunque en general no seamos capaces de determinar cuál es esa ordenación óptima de los vértices, podemos dar unas indicaciones razonables de cómo ordenar los vértices. Veamos. En el paso k del algoritmo, para colorear v_k habrá un cierto número de colores prohibidos;

[30]Si no sofista, directamente.

ese número dependerá de cuántos de los vecinos de v_k hayan sido ya coloreados, y de cuántos colores se hayan empleado en ellos. Así que, por un lado, ese número de colores prohibidos no puede ser mayor que el grado de v_k. Por otro lado, podría ocurrir que los $k-1$ vértices ya coloreados llevaran colores distintos, y que además todos ellos fueran vecinos de v_k. Esto nos dice que

$$(\star) \qquad \#\,\{\text{colores prohibidos en } v_k\} \leq \text{mín}\,\big\{\text{gr}(v_k), k-1\big\}.$$

Si pretendemos que el algoritmo austero utilice "pocos" colores, convendrá que el número de colores prohibidos en cada paso sea pequeño. En el mínimo que aparece a la derecha en $(\star)$, una parte, $k-1$, va aumentando (inexorablemente) con el flujo del algoritmo. La otra componente, grado(v_k), depende de cómo hayamos ordenado los vértices. Suena razonable, pues, colocar los vértices de mayor grado *al principio*, justamente para "neutralizar" esos grados altos aprovechando que hay pocos vértices ya coloreados; y situar al final los de menor grado, para compensar que en esas últimas etapas el número de vértices anteriores es elevado. Lector, lo anterior no deja de ser un (juicioso) consejo: no garantiza obtener coloraciones óptimas, y en algunos casos es hasta inaplicable, como en los dos ejemplos anteriores, que eran grafos regulares (todos los vértices con el mismo grado).

Casi el mismo argumento permite obtener una cota para el número cromático del grafo. Basta observar que

$$\text{mín}\{\text{grado}(v_k), k-1\} \leq \text{grado}(v_k) \leq \Delta(G),$$

donde $\Delta(G)$ es el grado máximo en el grafo G. Así que $(\star)$ nos dice que el número de colores prohibidos en cada paso es, a lo sumo, $\Delta(G)$, y que, por tanto:

Proposición 10.2.4 *Sea G un grafo y sea $\Delta(G)$ su máximo grado. Entonces el algoritmo austero utiliza a lo sumo $\Delta(G)+1$ colores, y por tanto*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1\,.$$

No está mal: del algoritmo austero, que en principio trataba únicamente de sistematizar el proceso de coloreado, obtenemos una conclusión sobre una característica intrínseca del grafo, como es su número cromático.

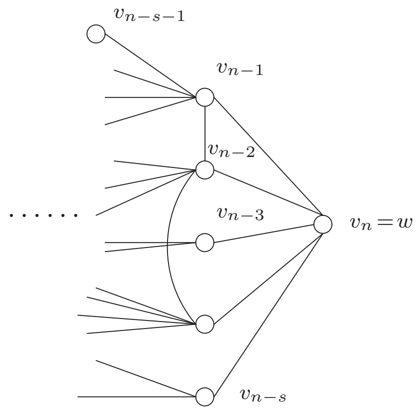
La cota de la proposición 10.2.4 mejora, en general, la acotación trivial $\chi(G) \leq |V(G)|$. Aunque habitualmente seguirá siendo excesiva, como en el grafo bipartito del ejemplo 10.2.3, cuyo número cromático es 2, mientras que $\Delta(G) = n-1$.

Con alguna condición adicional, podemos mejorarla ligeramente.

Proposición 10.2.5 *Si G es un grafo conexo con máximo grado $\Delta(G)$, y al menos un vértice w tiene $gr(w) < \Delta(G)$, entonces*

$$\chi(G) \leq \Delta(G)\,.$$

Observe el lector que para esta mejora de la proposición 10.2.4 hemos añadido las condiciones de que G contenga un vértice de grado no máximo, y que sea conexo. El resultado es ligeramente más general. Si G es un grafo completo, o si G es un grafo circular con un número impar de vértices, se tiene que $\chi(G) = \Delta(G) + 1$. En 1941, Brooks probó que si G es conexo, y no es ninguno de los dos casos anteriores, entonces $\chi(G) \leq \Delta(G)$. Véase también el ejercicio 10.2.6. No daremos aquí la prueba del teorema de Brooks, pero sí la:



DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN 10.2.5. Supongamos que tenemos n vértices y digamos que w tiene grado $s < \Delta(G)$. Ordenamos los vértices situando a w en la última posición, $w = v_n$, para poder sacar partido de su menor grado. Los s vecinos de w precederán a éste en el orden establecido $(v_{n-1}, \ldots, v_{n-s})$. Después, consideramos los vecinos de v_{n-1} que no hayan sido ya ordenados, luego los de v_{n-2} y así sucesivamente. Como G es conexo, al final tendremos una ordenación de todos los vértices. Aplicamos ahora el algoritmo austero: en cada paso estarán prohibidos los colores usados en los vecinos anteriores. Pero todos los vértices (excepto w) tienen algún vecino posterior, así que $\#\{\text{vecinos anteriores}\} \leq \Delta(G) - 1$, para todo $v \neq w$. Para w, es el grado el que es estrictamente menor que $\Delta(G)$. En total, en cada paso hay, a lo sumo, $\Delta(G) - 1$ colores prohibidos. Por tanto, con $\Delta(G)$ colores bastará para colorear. ■

10.2.3. Polinomio cromático

No sólo interesa saber si se puede colorear un grafo con k colores, sino también de cuántas formas[31] se puede colorear. La primera cuestión queda resuelta en cuanto se conoce el número cromático, $\chi(G)$: si $k \geq \chi(G)$ podremos colorear el grafo con k colores, y si $k < \chi(G)$, será imposible colorear el grafo con k colores. Dedicamos esta sección a la segunda cuestión y a algunas de sus conexiones.

Aquí, como queremos contar y calcular, conviene que los colores sean números, y qué mejor que los números de 1 a k. Dado un grafo G y para cada entero $k \geq 1$, llamamos

$$P_G(k) = \#\,\{\text{coloraciones distintas de } G \text{ usando los colores de la colección } \{1, \ldots, k\}\}\,,$$

teniendo en cuenta que *no es necesario* usarlos todos. P_G es una función de k; enseguida (en la sección 10.2.5) veremos que es un polinomio en k, al que nos referiremos como el **polinomio cromático** de G:

$$P_G(k) = \sum_j \alpha_j\, k^j\,.$$

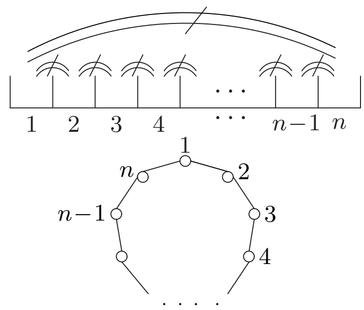
Note el lector cuán arteramente hemos dejado sin precisar los límites de la suma anterior. El número de sumandos, y de hecho los coeficientes (α_j), como asimismo veremos en la sección 10.2.5, contienen información relevante sobre la estructura del grafo.

Observemos, para empezar, que como un isomorfismo entre grafos traslada coloraciones de uno en coloraciones del otro, los polinomios cromáticos deben coincidir: es decir, si G y G' son dos grafos isomorfos, entonces $P_G(k) = P_{G'}(k)$, para cada entero $k \geq 1$.

[31] Combinatorios estamos, Sancho.

Puesto que, como hemos indicado, podemos tratar listas con restricciones usando el lenguaje de grafos coloreados, el polinomio cromático nos permitirá *contar* listas con restricciones. Así, si hemos formado un grafo G con n vértices y con aristas que codifican las restricciones, $P_G(k)$ nos informa del número de listas

- de longitud n con repetición permitida con los símbolos $\{1, \ldots, k\}$;
- y tales que si $\{i, j\} \in A(G)$, en las posiciones i y j de la lista usamos símbolos distintos.



Este lenguaje de los polinomios cromáticos permite codificar eficazmente cálculos con el principio de inclusión/exclusión. Supongamos, por ejemplo, que queremos contar el número de n-listas con k símbolos que cumplen las restricciones que representamos simbólicamente a la derecha (distintos símbolos en las posiciones primera y segunda, en la segunda y tercera, etc., y así hasta las dos últimas posiciones; además, la primera y última posiciones deben llevar símbolos distintos). Dibujamos también el grafo correspondiente, que resulta ser un grafo circular C_n. El recuento de estas listas no se puede usar directamente la regla del producto, justamente por esa última e inconveniente restricción entre la primera y la última posición. El principio de inclusión/exclusión requiere considerar n conjuntos (uno por arista) de n-listas: las n-listas con el *mismo* símbolo en las dos primeras posiciones, las que tienen el mismo símbolo en segunda y tercera, etc.; para luego restar del total de listas, k^n, los tamaños de todos estos conjuntos, sumar luego los de las intersecciones dos a dos, etc. Procedimiento altamente tóxico, avisamos.

Pero, con ayuda del lenguaje y los algoritmos que vamos a presentar a continuación, descubriremos (ejemplo 10.2.9) que la respuesta que buscamos, que no es otra que $P_{C_n}(k)$, el valor del polinomio cromático de C_n en k, viene dada por la siguiente sencilla fórmula:

$$P_{C_n}(k) = (k-1)^n + (-1)^n (k-1)\,.$$

El asunto parece merecer la pena.

En el resto de apartados de esta introducción presentaremos algunas observaciones generales sobre polinomios cromáticos, sobre su cálculo en algunos casos particulares, y sobre los polinomios cromáticos de algunas familias de grafos especialmente representativas. En la sección 10.2.4 daremos una regla de recurrencia/cálculo de polinomios cromáticos. Finalmente, la sección 10.2.5 contiene el análisis del polinomio cromático como objeto matemático en sí, en particular de la información que encierran sus coeficientes.

A. Polinomio cromático y número cromático

El polinomio cromático se pregunta por cuántas coloraciones hay, y el número cromático si hay alguna, así que cuál es el número cromático debe quedar recogido dentro del propio polinomio cromático. Veamos.

1) Con menos de $\chi(G)$ colores no podemos colorear el grafo, así que $P_G(k) = 0$ si $k < \chi(G)$.

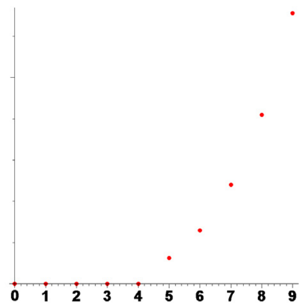
2) Con exactamente $\chi(G)$ colores se puede colorear el grafo de, al menos, una forma; por tanto, $P_G(\chi(G)) \geq 1$.

3) Digamos, por último, que para un cierto grafo G ya conocemos $P_G(k)$, el número de coloraciones distintas con k colores. Añadimos ahora algunos colores más: digamos que la paleta consta de $k' > k$ colores. Es evidente que con esos k' colores tendremos todas las coloraciones con k, y algunas más. Es decir, que $P_G(k)$ es una función creciente:

$$\text{si } k < k', \text{ entonces } P_G(k) \leq P_G(k').$$

En particular, a la vista de 2), $P_G(k) \geq 1$ para $k \geq \chi(G)$.

El aspecto de un polinomio cromático genérico se muestra a la derecha. El número cromático $\chi(G)$ del grafo es *el menor valor entero* de k en el que $P_G(k)$ no se anula (el de la figura tiene número cromático 5). Aunque, claro, este procedimiento de cálculo de $\chi(G)$ requiere conocer $P_G(k)$, que es un objeto en principio más complicado.



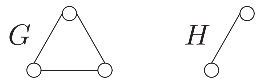
B. Subgrafos y polinomios cromáticos

Supongamos que H es un *subgrafo abarcador* de un grafo G; esto es, H tiene los mismos vértices que G y algunas de sus aristas (o quizás todas). Disponemos, además, de k colores. Toda coloración de G con esos k colores es también una coloración legal de H, pues H contiene, en principio, menos aristas (restricciones) que G. De manera que, para cada $k \geq 1$,

$$P_G(k) \leq P_H(k) \qquad \text{si } H \text{ es subgrafo abarcador de } G.$$

Lector, lea bien el sentido de esta desigualdad: el grafo “pequeño” (el subgrafo) es el que tiene más coloraciones, pues contiene menos aristas y por tanto es más fácil de colorear.

Avisamos, por cierto, de que el resultado no tiene por qué ser cierto para un subgrafo cualquiera: ser *abarcador* es imprescindible. En la figura de la derecha, H es subgrafo de G, pero no es subgrafo abarcador. Sus respectivos polinomios cromáticos son



$$P_G(k) = k(k-1)(k-2) \qquad \text{y} \qquad P_H(k) = k(k-1)\,.$$

Así que, si k es suficientemente grande, $P_G(k) > P_H(k)$, que va en sentido contrario a la desigualdad anterior. La razón es que ahora sigue siendo cierto que toda coloración de G induce una en H, pero podría haber muchas coloraciones de G que dieran lugar a la misma en H.

Si G es un grafo con n vértices, entonces G es subgrafo abarcador del grafo completo K_n. Por otro lado, el grafo vacío N_n es subgrafo abarcador de G. De lo que se deduce la siguiente desigualdad general:

$$\underbrace{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}_{=P_{K_n}(k)} \leq P_G(k) \leq \underbrace{k^n}_{=P_{N_n}(k)} \qquad \text{para cualquier } k \geq 1.$$

Vea el lector, en el ejemplo 10.2.4, el cálculo explícito de los polinomios cromáticos de grafos completos y vacíos.

C. Coloraciones usando todos los colores

Antes de entrar en el cálculo en sí de polinomios cromáticos, resolvemos una cuita que seguramente estará rondándole al lector. Dado un grafo, con $P_G(k)$ denotamos el número de coloraciones distintas de G si disponemos de k colores, con el añadido de que no es imprescindible usarlos todos. Si por ejemplo el grafo contiene tres vértices, y disponemos de veinte colores, es evidente que no podremos usarlos todos, pero tiene todo el sentido preguntarse por cuántas coloraciones son esa paleta de colores hay.

Pero también resulta natural preguntarse por cuántas coloraciones de un grafo hay en las que se usan *exactamente* k colores. Por ejemplo, en relación con la interpretación del coloreado como partición en bloques que esbozamos al principio de esta sección: una coloración general divide los vértices en bloques (sin aristas dentro de ellos), pero no sabemos en cuántos hasta no conocer cuántos colores se usan realmente.

Llamemos

$$Q_G(k) = \#\,\{\text{coloraciones de } G \text{ usando } \textit{todos} \text{ los colores de la colección } \{1,\dots,k\}\}\,.$$

De $Q_G(k)$ podemos decir, de inmediato, que vale 0 si $k < \chi(G)$, como en el caso de su hermano cromático $P_G(k)$; pero, atención, también vale 0 si $k > |V(G)|$, por la simple razón de que no se pueden usar más colores que vértices.

Además, no está claro que ahora la función $Q_G(k)$ sea creciente, es decir, que a más colores, más posibilidades de coloreado. Veamos un ejemplo. Digamos que el grafo es un L_5, con sus vértices etiquetados con $\{v_1,\dots,v_5\}$. Observe, lector, que $Q_{L_5}(5) = 5! = 120$, pues si tenemos 5 colores, y hay que usarlos todos, deberá ir uno distinto en cada vértice, y en ese caso las incompatibilidades recogidas en las aristas del grafo son irrelevantes. Calculemos ahora $Q_{L_5}(4)$: un color menos, ¿menos coloraciones? Veamos. Si hay que usar cuatro colores en cinco vértices, uno deberá ir repetido. Tenemos 4 posibilidades de escoger el color que se repite. Digamos que ese color repetido es el rojo. Decidimos ahora qué dos vértices van de rojo; observe, lector, que no pueden ser vértices consecutivos, por la estructura del grafo, y convénzase de que hay 6 posibles elecciones. Finalmente, para los tres vértices restantes, como se usan tres colores distintos, tenemos $3! = 6$ posibles asignaciones. Esto da un total de $4\cdot 6\cdot 6 = 144$ coloraciones… ¡que son más que las que teníamos con cinco colores!

Viene bien haber hecho este pequeño ejemplo para ilustrar cómo el cálculo de $Q_G(k)$ puede ser bastante complicado. Compárese con el correspondiente cálculo de $P_{L_5}(k)$, que, adelántandonos un poco al ejemplo 10.2.4, resulta valer $k(k-1)^4$, pues si tenemos k colores hay k posibilidades para colorear el vértice v_1, luego $k-1$ para el v_2, otras $k-1$ para v_3, etc.; la regla del producto hace el resto.

Sin embargo, podemos dar una *fórmula explícita* de $Q_G(k)$ en términos del polinomio cromático $P_G(k)$, de manera que no es necesario desarrollar un análisis específico de esta nueva función. ¿Cuál es esa fórmula? Reconozca, lector, que lo primero que le viene a la cabeza es: si tengo que usar exactamente k colores, cuento coloraciones con hasta k colores, y luego le resto las coloraciones que usan hasta $k-1$ colores. Esto es,

$$Q_G(k) = P_G(k) - P_G(k-1).$$

Pues no, la fórmula anterior no es cierta. La razón (una de ellas) por la que no es cierta es que del paso de los k a los $k-1$ colores habría que elegir, al menos, qué color se descarta, ¿no?

Vamos a argumentar al revés: partimos de las coloraciones de G con una paleta de k colores, por ejemplo $\{1,\dots,k\}$. Podemos clasificar estas coloraciones en función del número exacto de colores que utilizan: con (exactamente) un color, con (exactamente) dos colores, hasta las que usan exactamente k colores. Analizamos ahora una de esas clases, digamos aquellas coloraciones en las que se usan exactamente j colores de la paleta original. Para contar cuántas hay elegimos, primero, qué j colores se usan (hay $\binom{k}{j}$ posibilidades), para luego contar cuántas coloraciones con *esos* j colores hay; este número es lo que hemos llamado $Q_G(j)$. Esto nos dice, tras la pertinente aplicación de la regla de la suma y del producto, que

$$P_G(k) = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} Q_G(j).$$

Observe, lector, que la suma anterior empieza en realidad en $j = \chi(G)$. Y luego note (con alborozo) que la expresión anterior, que liga las sucesiones $P_G(k)$ y $Q_G(k)$, se presta a ua (palmaria) aplicación del procedimiento de inversión binómica que describimos en el apartado 5.1.7. En particular, usando el corolario 5.1.26, deducimos inmediatamente que:

Proposición 10.2.6 *Dado un grafo G,*

$$Q_G(k) = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j}\, P_G(j).$$

Como antes, la suma empieza en realidad en $j = \chi(G)$.

Como ejemplo de aplicación de la proposición 10.2.6, retomamos el cálculo de $Q_{L_5}(4)$ y de $Q_{L_5}(5)$ que antes hicimos con argumentos combinatorios. Aceptando que $P_{L_5}(k) = k(k-1)^4$, y usando que $\chi(L_5) = 2$, tenemos que

$$Q_{L_5}(4) = P_G(4) - \binom{4}{3} P_G(3) + \binom{4}{2} P_G(2) = (4\cdot 3^4) - 4\cdot(3\cdot 2^4) + 6\cdot(2\cdot 1^4) = 144,$$

$$Q_{L_5}(5) = P_G(5) - \binom{5}{4} P_G(4) + \binom{5}{3} P_G(3) - \binom{5}{2} P_G(2) = \cdots = 120.$$

D. Cálculo de polinomios cromáticos

El lector habrá sabido valorar en su justa medida las generalidades sobre polinomios cromáticos vistas hasta aquí. Bien, muy interesantes. Pero si lo que pretenden (nos espetará) es resolver una cuestión combinatoria (cuántas listas hay tales que. . .) con este lenguaje, lo mínimo exigible es que nos provean (nos exigirá) de cierta técnica para calcular explícitamente polinomios cromáticos.

Vamos con ello. Avisamos, antes de empezar, que el cálculo del polinomio cromático de grafo general es un asunto complejo desde el punto de vista computacional. Si no lo fuera, por ejemplo, entraríamos en flagrante contradicción con la afirmación de unas páginas atrás al respecto de que el cálculo del número cromático era también complicado.

En ocasiones, no muchas, el polinomio cromático del grafo se calcula por simple aplicación de la regla del producto.

Ejemplo 10.2.4 *Los polinomios cromáticos de grafos lineales L_n, completos K_n, vacíos N_n, y de árboles.*

Consideremos, para empezar, el grafo lineal L_n, digamos que con $n \geq 2$ vértices. Hay k colores. El grafo está etiquetado, con los números de 1 a n, por ejemplo de izquierda a derecha en ese imaginario dibujo que el lector tiene ahora mismo en mente. Arrancamos el recuento: k posibilidades para el primer vértice, $k-1$ para el segundo (está prohibido utilizar el color que hayamos asignado al primer vértice), de nuevo $k-1$ para el tercero (ahora no es elegible el color asignado al segundo vértice), etc. La conclusión, vía regla del producto, es que si $n \geq 2$,

$$\boxed{P_{L_n}(k) = k(k-1)^{n-1}}$$

y que, por tanto, $\chi(L_n) = 2$, como ya sabíamos, pues el polinomio se anula en $k = 0$ y $k = 1$, pero ya no en $k = 2$.

Un recuento similar nos da el polinomio de un grafo completo K_n con $n \geq 1$ vértices: k posibilidades para el primer vértice, $k-1$ para el segundo (un color prohibido), $k-2$ para el tercero (pues están prohibidos los colores –distintos– usados en los dos vértices anteriores), etc., de manera que

$$\boxed{P_{K_n}(k) = k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}$$

que coincide, como debe ser, con el número de n-listas sin repetición que se pueden formar con k símbolos. Como n es el primer entero en el que este polinomio no se anula, $\chi(K_n) = n$.

Por último, para el grafo vacío N_n, como no hay aristas, no tenemos colores prohibidos para colorear los vértices, por lo que

$$\boxed{P_{N_n}(k) = k^n}$$

un resultado que parafrasea el bien conocido de que hay k^n n-listas con repetición permitida formadas con k símbolos, o que el número total de aplicaciones de un conjunto con n elementos en otro con k elementos es k^n. Por cierto, de la expresión del polinomio cromático deducimos de nuevo que $\chi(N_n) = 1$.

Consideremos, por último, un árbol G con n vértices. Fijemos uno cualquiera de esos vértices como raíz, véase la sección 9.2. Desde la raíz, partimos los vértices en generaciones. Como podemos usar el mismo color en toda una generación, y como cada dos generaciones podemos repetir colores, podemos usar k colores para la raíz y $k-1$ para cada uno de los vértices de la generaciones siguientes. Tenemos así que

$$\boxed{P_G(k) = k(k-1)^{n-1}}$$

si G es un árbol con n vértices. El caso $G = L_n$ es sólo un caso particular. ♣

Note el lector cómo este último ejemplo permite obtener una cota general para polinomios cromáticos de *grafos conexos*. Si G es un grafo conexo con n vértices, tiene (al menos) un árbol abarcador con esos mismos n vértices (sección 9.2.2). Y por tanto, si G es conexo, apelando al argumento sobre subgrafos abarcadores visto antes,

$$P_G(k) \leq k(k-1)^{n-1}.$$

Los grafos conexos, al tener (varias, bastantes, las suficientes) aristas, no admiten todas las posibles coloraciones, lo que se traduce en la cota anterior, que afina más que la general $P_G(k) \leq k^n$, válida para todo grafo con n vértices, conexo o no.

Supongamos ahora que el grafo no es conexo. Digamos, para empezar, que G consta de dos componentes conexas, G_1 y G_2. Como no hay aristas entre vértices de las componentes G_1 y G_2, las coloraciones de las dos componentes son "independientes". El recuento total pasa por calcular, por separado, el número de coloraciones con k colores de G_1 y de G_2, para después, aplicando la regla del producto, concluir que

$$P_G(k) = P_{G_1}(k) \cdot P_{G_2}(k)\,.$$

La extensión a varias componentes conexas es directa:

Lema 10.2.7 *Si G tiene r componentes conexas, digamos $G_1, \dots, G_r$, entonces*

$$P_G(k) = P_{G_1}(k) \cdots P_{G_r}(k).$$

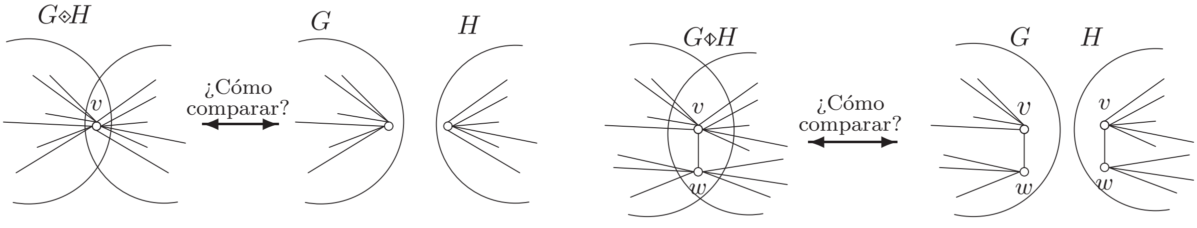
Como aplicación directa del lema 10.2.7, tenemos que si G es un *bosque* (esto es, un grafo sin ciclos) con n vértices y t componentes conexas, su polinomio cromático es

$$P_G(k) = k^t (k-1)^{n-t},$$

pues cada árbol G_i que lo conforma aporta un factor $k(k-1)^{n_i-1}$, donde n_i es el número de vértices que pertenecen a este árbol particular.

A continuación tratamos dos situaciones particulares, pero (relativamente) frecuentes, en las que el grafo en cuestión está formado por dos grafos que tienen en común, bien un vértice, bien una arista (y sus dos vértices), claro.

Llamemos $G \diamond H$ al grafo formado por dos grafos G y H que comparten únicamente un vértice v; y denotemos por $G \,\Phi\, H$ al grafo formado por los grafos G y H que comparten exactamente una arista, por ejemplo, la arista (v, w). Nos gustaría escribir los polinomios cromáticos de los grafos $G \diamond H$ y $G \,\Phi\, H$ en términos de los polinomios de G y de H.

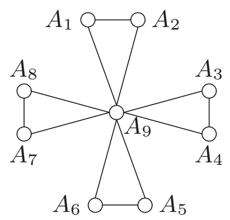


Proposición 10.2.8 *Con la nomenclatura anterior,*

$$\text{a)}\qquad P_{G\diamond H}(k) = \frac{P_G(k)\,P_H(k)}{k};\qquad \text{b)}\qquad P_{G\Phi H}(k) = \frac{P_G(k)\,P_H(k)}{k\,(k-1)}.$$

Antes de probar este resultado, y como ilustración de su uso, vemos un par de ejemplos:

Ejemplo 10.2.5 *Volvemos a la cuestión del ejemplo* 10.2.1*. Ahora se trata de calcular cuántos horarios distintos se pueden confeccionar.*

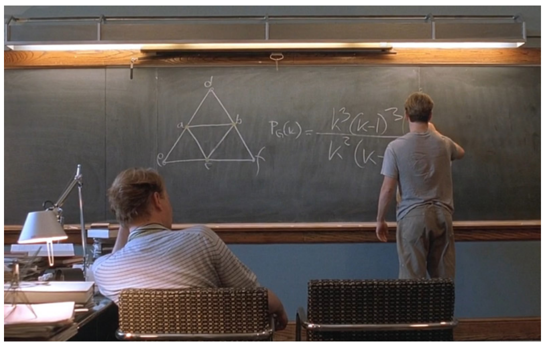


Toda la información sobre las asignaturas y las incompatibilidades se recogía en el grafo "aspas de molino" que dibujamos a la derecha. Como el grafo consta de cuatro triángulos que comparten entre sí un único vértice, aplicamos reiteradamente la parte a) de la proposición 10.2.8 para obtener que

$$P_G(k) = \frac{[k(k-1)(k-2)]^4}{k^3} = k(k-1)^4(k-2)^4\,.$$

Este cálculo se puede hacer también directamente: primero, hay k posibilidades para colorear el vértice central. Una vez coloreado éste, hay $(k-1)(k-2)$ posibilidades para colorear cada par de vértices que son extremos de un aspa. En total, $k(k-1)^4(k-2)^4$. ♣

Ejemplo 10.2.6 *El polinomio cromático del grafo de "El indomable Will Hunting".*



En una escena de la película se calculaba, en animada e ingenua recreación del proceso de descubrimiento matemático, el polinomio cromático del grafo que aparece dibujado en la pizarra en el fotograma, que está formado por cuatro triángulos que comparten tres aristas.

Simulando la acción de la película, llamemos G_3 al grafo que contiene tres triángulos (por ejemplo, el que se obtiene quitando el de la esquina inferior izquierda), G_2 el que tiene dos triángulos (quitamos los dos de las esquinas inferiores) y, finalmente, G_1 al del triángulo. El polinomio cromático de G_1 es, simplemente, $P_{G_1}(k) = k(k-1)(k-2)$. Aplicando la parte b) de la proposición 10.2.8, obtenemos, sucesivamente, que

$$P_G(k) = \frac{P_{G_3}(k)\,[k(k-1)(k-2)]}{k(k-1)} = \frac{P_{G_2}(k)\,[k(k-1)(k-2)]^2}{[k(k-1)]^2} = \frac{P_{G_1}(k)\,[k(k-1)(k-2)]^3}{[k(k-1)]^3}\,.$$

Sólo queda tachar, con cierta teatralidad (tal como sucedía en la película), los factores comunes arriba y abajo para deducir que $P_G(k) = k(k-1)(k-2)^4$.

Alternativamente, podemos organizar el cálculo del polinomio cromático coloreando primero el triángulo interior, de $k(k-1)(k-2)$ maneras, para luego observar que cada vértice exterior se puede colorear de $k-2$ maneras, sea cual sea la coloración usada en el triángulo interior, dando así un total de $k(k-1)(k-2)^4$ posibles coloraciones del grafo en cuestión. ♣

Demostración de la proposición 10.2.8. a) Observamos primero que, dado un grafo F, un conjunto de colores $\{1,\dots,k\}$ y un cierto vértice v del grafo, se tiene, argumentando con que los colores son intercambiables, que

$$\#\,\{\text{coloraciones de } F \text{ con } \{1,\dots,k\} \text{ en las que } v \text{ recibe el color } 1\} = \frac{P_F(k)}{k}\,,$$

Aquí, la elección de color 1 para v es arbitraria; podríamos haber tomado cualquier otro.

Consideramos ahora los grafos $G\diamond H$, G y H, y sus respectivos polinomios cromáticos. El número de colores k está fijo. Tomamos uno de ellos, digamos el verde. Hay una proporción $P_{G\diamond H}(k)/k$ de coloraciones del primer grafo que le asocian el color verde al vértice v. Y también hay sendas proporciones $P_G(k)/k$ y $P_H(k)/k$ de coloraciones de G y H en las que v va de verde. Sólo éstas "mezclan" bien para dar lugar a una coloración de $G\diamond H$ con v pintado de verde. La conclusión es que

$$\frac{P_{G\diamond H}(k)}{k} = \frac{P_G(k)}{k}\cdot\frac{P_H(k)}{k},$$

lo que nos da el resultado.

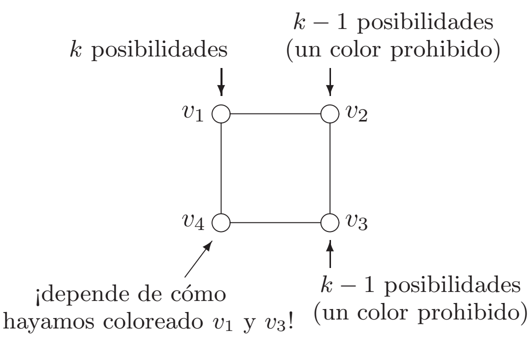
b) Para la segunda parte, observamos que si tenemos un grafo F, unos colores $\{1,\dots,k\}$ y consideramos una arista (v,w) del grafo, entonces

$$\#\left\{\begin{array}{c}\text{coloraciones de } F \text{ con } \{1,\dots,k\} \text{ en las que } v\\ \text{recibe el color 1 y } w \text{ recibe el color 2}\end{array}\right\} = \frac{P_F(k)}{k\,(k-1)}\,.$$

De nuevo, en lugar de 1 y 2, podríamos haber elegido cualquier otro par de colores. Y ahora, como antes, fijamos dos colores (distintos), verde y azul, y contamos por un lado la proporción de las coloraciones de $G\diamond H$ que asignan verde a v y azul a w, y por otro, la proporción de coloraciones de G y H con esa misma asignación de colores a los vértices comunes, que son las únicas que se pueden fundir para dar una coloración del grafo $G\diamond H$. Complete los detalles el lector. Y revise, si lo desea, la generalización del ejercicio 10.2.17. ■

Pero ni el recuento directo con la regla del producto, ni los trucos de separación de la proposición 10.2.8, permiten resolver el siguiente (muy relevante) ejemplo.

Ejemplo 10.2.7 *El polinomio cromático del grafo circular C_4: comienzan las dificultades.*

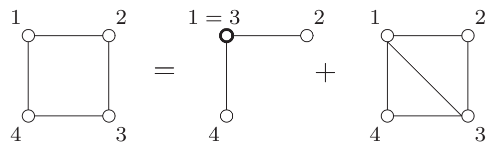


Intentamos, como en los ejemplos anteriores, contar directamente, aplicando la regla del producto. El dibujo de la izquierda muestra el proceso, en el que vamos calculando las posibilidades a nuestra disposición en los sucesivos vértices. Al llegar al último vértice nos encontramos con una dicotomía que no permite completar el argumento. Esto ya lo vimos en el ejemplo 2.2.7, aunque allí nos ocupaba el lenguaje de las listas con prohibiciones, y resolvimos el entuerto pasando al complementario y utilizando el principio de inclusión/exclusión en su forma general; o utilizando la regla de la suma (véase el comienzo de la sección 2.3). ♣

10.2.4. Recursión/algoritmo "come-aristas"

Oiga, reclamará el lector. ¡Oiga!, insistirá[32]. Introducen este lenguaje de los polinomios cromáticos, nos prometen maravillas, resuelven un par de ejemplillos de poca monta, para los que por otra parte no hacía falta nada de esto, pues se trata únicamente de aplicar la regla del producto, y en cuanto empiezan las dificultades, como en el caso del C_4, nos encargan[33] que repasemos un par de argumentos combinatorios de hace un millón de páginas.

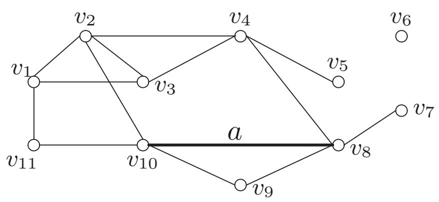
Tregua, querido lector. Repase[34] el argumento de la sección 2.3 sobre el número de 4-listas que no tenían símbolos consecutivos iguales y tales que el primer y último símbolo también eran distintos. Allí consideramos dos casos: en uno, las posiciones primera y tercera llevaban el mismo símbolo, y en el otro, símbolos distintos. Y los interpretábamos, en un caso, como si una única posición englobara a la primera y a la tercera, y en el otro, como si tuviéramos una restricción adicional.



En el lenguaje de los grafos, construir las citadas listas es lo mismo que colorear un grafo C_4. Las listas en las que las posiciones 1 y 3 llevan el mismo símbolo se obtendrían coloreando un grafo lineal con tres vértices, y las listas con símbolos distintos en esas dos posiciones, coloreando un C_4 al que añadimos una de las diagonales. El dibujo de la derecha, que ha de entenderse como una manera simbólica de expresar igualdades entre polinomios cromáticos, significa que las coloraciones de C_4 son aquéllas en las que 1 y 3 tienen el mismo color (y, por tanto, son coloraciones del primer grafo a la derecha del signo de igualdad), y aquéllas en las que 1 y 3 llevan distinto color (y, por tanto, son coloraciones del segundo grafo a la derecha del signo de igualdad).

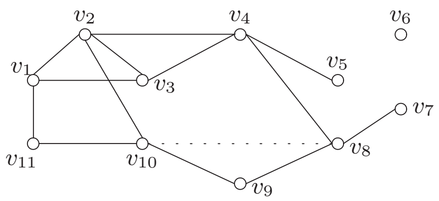
Vamos a extender esta idea a una situación general. Sea un grafo G; nos fijamos en una arista suya, $a \in A$, que señalamos en el dibujo:

G



Formamos ahora el grafo $G \setminus \{a\}$ quitando esa arista:

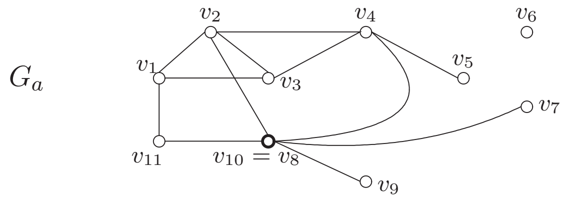
$G \setminus \{a\}$



Y consideramos el grafo, que llamaremos G_a, que se forma *identificando* los vértices unidos

[32] Por si estamos a otra cosa.
[33] Sutil invitación.
[34] Ahora la invitación no es sutil.

por la arista a. Si, como ocurre en el ejemplo entre v_9 y el nuevo vértice $v_8 = v_{10}$ (v_8 y v_{10} estaban ambos unidos a v_9 en G) apareciese una arista doble, nos quedamos con una simple:



Fijamos k colores y damos por calculados $P_G(k)$, $P_{G\setminus\{a\}}(k)$ y $P_{G_a}(k)$. Partimos las posibles coloraciones de $G \setminus \{a\}$ como sigue:

$$\#\left\{\begin{array}{c}\text{Coloraciones}\\ \text{de } G\setminus\{a\}\\ \text{con } k \text{ colores}\end{array}\right\} = \#\left\{\begin{array}{c}\text{Coloraciones de } G\setminus\{a\} \text{ con } k\\ \text{colores que llevan colores}\\ \text{distintos en los extremos de } a\end{array}\right\} + \#\left\{\begin{array}{c}\text{Coloraciones de } G\setminus\{a\} \text{ con } k\\ \text{colores que llevan el mismo}\\ \text{color en los extremos de } a\end{array}\right\}.$$

Observemos ahora que las coloraciones de $G\setminus\{a\}$ que llevan colores distintos en los extremos de a son coloraciones válidas para G (en G tenemos una prohibición más, la que impone la arista a; pero una coloración de éstas respeta esta prohibición). Y las coloraciones de $G\setminus\{a\}$ que llevan el mismo color en los extremos de a son asimismo coloraciones válidas para G_a, donde los dos vértices son en realidad el mismo. Así que

$$\#\left\{\begin{array}{c}\text{Coloraciones de } G\setminus\{a\}\\ \text{con } k \text{ colores}\end{array}\right\} = \#\left\{\begin{array}{c}\text{Coloraciones de } G\\ \text{con } k \text{ colores}\end{array}\right\} + \#\left\{\begin{array}{c}\text{Coloraciones de } G_a\\ \text{con } k \text{ colores}\end{array}\right\}.$$

Es decir,

$$P_{G\setminus\{a\}}(k) = P_G(k) + P_{G_a}(k)\,.$$

O, como resulta conveniente escribir:

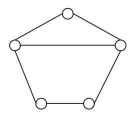
Lema 10.2.9 (Recurrencia de polinomios cromáticos) *Sea G un grafo y sea a una arista cualquiera del grafo. Entonces,*

$$P_G(k) = P_{G\setminus\{a\}}(k) - P_{G_a}(k).$$

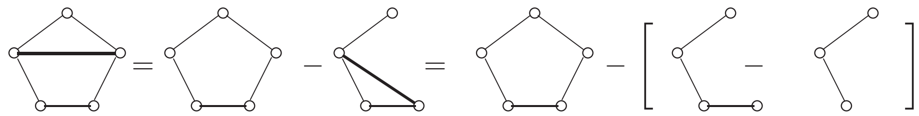
Interpretamos esta identidad como una *recurrencia* para polinomios cromáticos pues tanto G_a como $G\setminus\{a\}$ tienen una (o más) aristas *menos* que G. Sacaremos jugo, mucho, de esta identidad, en el análisis de las propiedades de (los coeficientes de) polinomios cromáticos en el apartado 10.2.5.

Y también se puede transformar en un procedimiento de cálculo del polinomio cromático $P_G(k)$ de un grafo G. Este algoritmo, al que nos referiremos como el **algoritmo comearistas**, por razones que se harán evidentes en un momento, va como sigue: seleccionamos una arista del grafo G, digamos a, y escribimos $P_G(k)$ en términos de $P_{G\setminus\{a\}}(k)$ y $P_{G_a}(k)$, como arriba. Ahora, en el grafo $G \setminus \{a\}$ seleccionamos una arista, digamos b, y escribimos $P_{G\setminus\{a\}}(k)$ en términos de $P_{(G\setminus\{a\})\setminus\{b\}}(k)$ y $P_{(G\setminus\{a\})_b}(k)$. En el grafo G_a hacemos algo análogo. Y así sucesivamente. El proceso termina cuando los grafos que van apareciendo no tengan aristas, pues los polinomios cromáticos de grafos vacíos son conocidos.

En la práctica, querido lector, el proceso se puede parar antes si por el camino aparecen grafos cuyos polinomios cromáticos ya sean conocidos.

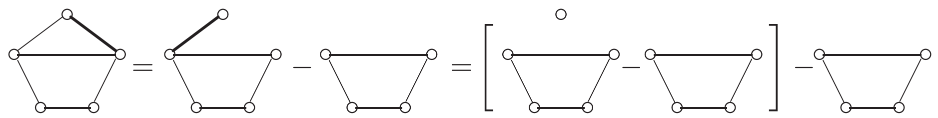


Consideremos, por ejemplo, el grafo de la izquierda. Con la notación simbólica explicada antes para expresar igualdades entre polinomios cromáticos, podemos optar por aplicar (dos veces) la recursión como sigue (marcamos en negrita las dos aristas sobre las que se aplica la recursión):



Esto nos dice que $P_G(k) = P_{C_5}(k) - P_{L_4}(k) + P_{L_3}(k)$, y la cuestión queda resuelta a falta de disponer de una fórmula para $P_{C_5}(k)$. Como esta fórmula aparecerá en breve (ejemplo 10.2.9), damos por terminado el procedimiento.

Aunque también podríamos haber optado por hacer



que nos da que $P_G(k) = kP_{C_4}(k) - 2P_{C_4}(k)$, en la que sólo restaría conocer $P_{C_4}(k)$.

Observe, lector, que quizás el camino más directo pasaría, tras observar que el grafo es un triángulo y un cuadrado que comparten una arista, por utilizar la parte b) de la proposición 10.2.8 para escribir que

$$P_G(k) = \frac{P_{C_3}(k) P_{C_4}(k)}{k(k-1)} = (k-2)\, P_{C_4}(k)\,,$$

que nos lleva en un periquete a la relación obtenida con la aplicación del algoritmo descrita en el segundo esquema de arriba.

Por cierto, el grafo en cuestión parece estar “más cerca” del grafo completo con cinco vértices (cuyo polinomio cromático es conocido) que del grafo vacío con cinco vértices, pues en un caso le “faltan” cuatro aristas, y en el segundo le “sobran” seis. Cabría preguntarse si no sería más conveniente transformar nuestro algoritmo de manera que, en lugar de eliminar aristas, fuéramos añadiéndolas. Medite el lector sobre la cuestión.

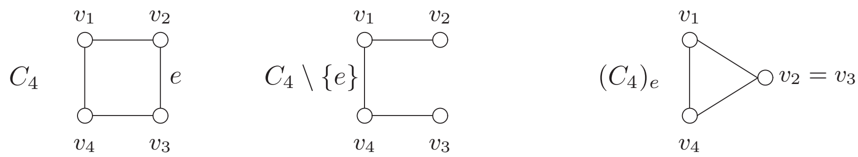
Este algoritmo tienen un interés meramente teórico. Obsérvese, por ejemplo, que en cada paso se va duplicando el número de grafos involucrados; impensable usarlo para un grafo general con muchos vértices y aristas. Sin embargo, puede resultar útil para resolver casos sencillos, e incluso, concedemos, puede ser hasta entretenido[35]. Oiga, y si no se le ocurre otra cosa para calcular el polinomio cromático de un cierto grafo, no se prive de utilizarlo.

Pero al menos permite resolver un ejemplo especialmente relevante, que ronda desde hace ya unas cuantas páginas, como es el de calcular el polinomio cromático de los grafos circulares.

[35] Lectores compitiendo animadamente por ver quién consigue elegir mejor las aristas que se van eliminando, discutiendo si uno ha dibujado bien el grafo del paso cuarto, ¡eh!, sumaste mal ese signo, y tú te despistaste aquí o allá. . .

EJEMPLO 10.2.8 *El polinomio cromático del grafo C_4.*

Consideramos los siguientes grafos:

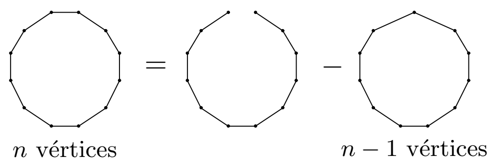


y aplicamos la regla de recurrencia para concluir que

$$P_{C_4}(k) = P_{L_4}(k) - P_{C_3}(k) = k(k-1)^3 - k(k-1)(k-2) = k(k-1)(k^2-3k+3)\,.$$

♣

EJEMPLO 10.2.9 *El polinomio cromático de un C_n.*



Argumentamos ya en general, para un grafo circular C_n. En el primer paso del algoritmo, como se muestra a la derecha, escribimos el polinomio cromático de C_n como el de L_n (que conocemos) menos el de C_{n-1}. La aplicación de la recurrencia a C_{n-1} permite escribir su polinomio cromático como el de un L_{n-1} menos el de un C_{n-2}. Repitiendo este proceso, obtenemos

$$\begin{aligned} P_{C_n}(k) &= P_{L_n}(k) - P_{C_{n-1}}(k) = P_{L_n}(k) - \big[P_{L_{n-1}}(k) - P_{C_{n-2}}(k)\big] \\ &= P_{L_n}(k) - P_{L_{n-1}}(k) + \big[P_{L_{n-2}}(k) - P_{C_{n-3}}(k)\big] \\ &= \cdots = \sum_{j=1}^{n-3} (-1)^{j+1}\, P_{L_{n-j}}(k) + (-1)^{n-3} P_{C_3}(k)\,. \end{aligned}$$

Como los polinomios cromáticos de los grafos lineales y del grafo C_3 son conocidos, la fórmula anterior permite resolver la cuestión. Aunque...

El siguiente truco, específico para este ejemplo, nos llevará a obtener una expresión bastante más manejable. Escribimos

$$\begin{aligned} P_{C_n}(k) &= P_{L_n}(k) - P_{C_{n-1}}(k) = k(k-1)^{n-1} - P_{C_{n-1}}(k) \\ &= (k-1+1)(k-1)^{n-1} - P_{C_{n-1}}(k) = (k-1)^n + (k-1)^{n-1} - P_{C_{n-1}}(k), \end{aligned}$$

donde, observe el lector, hemos sumado y restado 1 para llegar a la última identidad, que se puede escribir como

$$P_{C_n}(k) - (k-1)^n = -[P_{C_{n-1}}(k) - (k-1)^{n-1}]\,.$$

Resolvemos ahora esta regla de recurrencia de nuevo por iteración,

$$\begin{aligned} P_{C_n}(k) - (k-1)^n &= -\big[P_{C_{n-1}}(k) - (k-1)^{n-1}\big] = (-1)^2\big[P_{C_{n-2}}(k) - (k-1)^{n-2}\big] \\ &= \cdots = (-1)^{n-3}\big[P_{C_3}(k) - (k-1)^3\big]\,, \end{aligned}$$

para obtener, recordando que $P_{C_3}(k) = k(k-1)(k-2)$, la anunciada fórmula

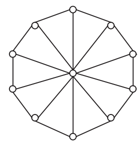
$$\boxed{P_{C_n}(k)} = (k-1)^n + (-1)^{n-3}\left[k(k-1)(k-2) - (k-1)^3\right] = \boxed{(k-1)^n + (-1)^n(k-1)}$$

Si n es par, el polinomio cromático no se anula en $k = 2$, y si n es impar, sí se anula en $k = 2$, pero no en $k = 3$. Así que, para $n \geq 1$, $\chi(C_{2n}) = 2$, mientras que $\chi(C_{2n+1}) = 3$. ♣

Ejemplo 10.2.10 *El polinomio cromático del grafo rueda R_n.*

El grafo rueda al que nos referimos tiene $n+1$ vértices: n de ellos se ubican como si de un C_n se tratara, y el vértice adicional, que situamos en el centro, tiene arista con los demás (como si fueran los radios de una bicicleta). Véase la figura.

R_n



Note el lector primero que no hay manera de "separar" por ejemplo triángulos para aplicar la proposición 10.2.8. Pero observe que el vértice central es especial, pues el color que se use en él no puede ser utilizado en ninguno de los restantes. De manera que, si elegimos el color usado en ese vértice central (hay k posibilidades) y luego nos aseguramos de no usarlo más, entonces lo que queda es colorear un C_n aunque, eso sí, con un color menos de los originales. Es decir,

$$P_{R_n}(k) = k \cdot P_{C_n}(k-1) = k\left[(k-2)^n + (-1)^n\,(k-2)\right],$$

sin más que utilizar la fórmula para para el polinomio cromático de un C_n del ejemplo precedente. ♣

Concluimos este apartado con un cálculo adicional.

Ejemplo 10.2.11 *El polinomio cromático del grafo bipartito completo $K_{p,q}$, con $p, q \geq 1$.*

Salvo en casos especialmente sencillos, como por ejemplo tomar $p = 1$ (que nos daría un árbol), el cálculo del polinomio cromático de $K_{p,q}$ no parece abordable con las técnicas descritas antes: ni con recuento directo, ni con técnicas de separación, ni tampoco con el algoritmo recursivo. Inténtelo (hasta la desazón) lector, y vea que no es posible.

Sin embargo, el hecho de que sea un bipartito completo nos permite el análisis que sigue. Disponemos de k colores. Llamemos U a uno de los conjuntos de vértices (el de tamaño p) y V al otro. Observamos que todos los colores usados en U quedan automáticamente prohibidos para V. Los vértices de U se pueden colorear usando (exactamente) entre 1 y p colores. Llamemos (provisionalmente) $A(p,m,k)$ al número de maneras de colorear los p vértices de U usando exactamente m de los k colores disponibles. Clasificando las coloraciones del grafo en función de ese valor m, podemos escribir que

$$P_{K_{p,q}}(k) = \sum_{m=1}^{p} A(p,m,k) \cdot (k-m)^q,$$

pues si descartamos los m colores usados en U quedan $k-m$ para colorear los q vértices de V *ya sin restricción alguna.*

Para calcular $A(p,m,k)$ necesitaremos, primero, elegir qué m colores se usan realmente en el coloreado (de los k posibles), para luego, una vez fijados, pintar los p vértices con esos colores; es decir, partir los p vértices en m bloques (no vacíos y numerados, pues cada uno se corresponde con un color). Esta cuestión ya la tenemos resuelta: revise el lector la discusión sobre aplicaciones sobreyectivas y números de Stirling de la sección 5.3.1, y en particular el lema 5.3.1, y concluya que

$$P_{K_{p,q}}(k) = \sum_{m=1}^{p} \binom{k}{m} m!\, S(p,m)\,(k-m)^q.$$

La fórmula anterior tiene, como ligero inconveniente, que los papeles en ella de p y q no parecen simétricos, cuando a la vista de la estructura del grafo sí deberían serlo. Es sólo apariencia. Si por ejemplo usamos aquella identidad algebraica del lema 5.3.8, que entonces enmarcamos en un problema de cambios de base entre polinomios, y que dice que

$$x^q = \sum_{n=1}^{q} S(q,n)\, x(x-1)\cdots(x-n+1) \qquad \text{para todo } q \geq 1,$$

y la usamos en la fórmula anterior (sustituyendo el factor $(k-m)^q$), obtenemos que

$$\begin{aligned} P_{K_{p,q}}(k) &= \sum_{m=1}^{p}\sum_{n=1}^{q} k(k-1)\cdots(k-m+1)\, S(p,m)\cdot(k-m)(k-m-1)\cdots(k-m-n+1)\, S(q,n) \\ &= \sum_{m=1}^{p}\sum_{n=1}^{q} S(p,m)\, S(q,n) \binom{k}{m+n} \frac{1}{(m+n)!}. \end{aligned}$$

Nótese cómo en esta fórmula los papeles de p y q son completamente intercambiables. Y reconozca, lector, que es una fórmula bastante inesperada. ♣

10.2.5. Coeficientes del polinomio cromático

Como grafos isomorfos tienen polinomios cromáticos idénticos, los coeficientes del polinomio cromático deben codificar información intrínseca sobre la estructura del grafo. Conviene advertir que no tanta como para caracterizarlo, pues hay grafos no isomorfos con el mismo polinomio cromático. Por ejemplo, como ya hemos visto anteriormente, todo árbol con n vértices tiene como polinomio cromático a $k(k-1)^{n-1}$. El estudio sistemático que iniciamos ahora desvelará parte de la información que encierran los coeficientes.

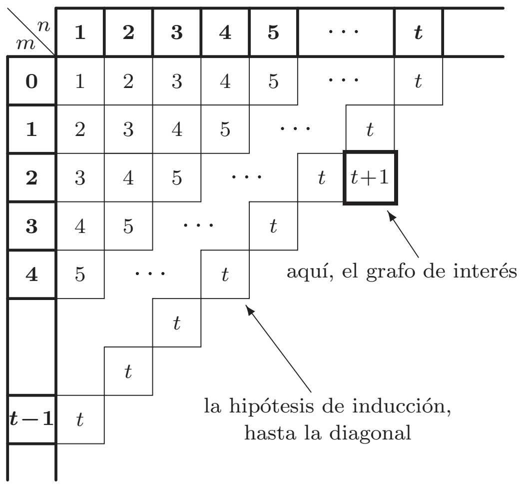
Varias de las propiedades de los polinomios cromáticos que enunciaremos a continuación serán demostradas por inducción, apoyándonos en la recursión del lema 10.2.9, que relaciona el polinomio cromático de un grafo G con los polinomios cromáticos de $G\setminus\{a\}$ y G_a, que son grafos que, recuerde el lector, tienen (ambos) menos aristas, y el segundo menos vértices.

Para estas pruebas por inducción argumentaremos sobre una matriz infinita cuyas columnas van etiquetadas con $n = 1, 2, \ldots$, que indica número de vértices, y cuyas filas llevan etiquetas $m = 0, 1, 2, \ldots$ indicando número de aristas. En una casilla de coordenadas n y m consideraremos que habitan[36] todos los grafos con n vértices y m aristas. Por ejemplo, en las

[36] Algo apretujados.

casillas de la primera fila están los sucesivos grafos vacíos N_n, $n \geq 1$. No todas las casillas de la tabla contienen grafos; de hecho, la columna rotulada con n sólo contiene grafos en las celdas situadas en filas de índice $m \leq \binom{n}{2}$.

Querremos probar que el polinomio cromático de un grafo G situado en una casilla de coordenadas n y m cumple tal o cual propiedad. El esquema de inducción (basado en la recursión) consistirá en probar ese enunciado a partir de que esa misma propiedad es verificada por a) los polinomios cromáticos de todos los grafos ubicados en la casilla de coordenadas n y $m-1$ (que es donde vive $G \setminus \{a\}$); y b) los polinomios cromáticos de todos los grafos ubicados en las casillas de la columna $n-1$ y filas de etiqueta $\leq m-1$ (pues en cualquiera de esas casillas puede ubicarse, en principio, G_a). La inducción se completará si la propiedad se verifica para unos casos iniciales, por ejemplo la fila $m = 0$.



Hay al menos dos maneras de recorrer la tabla que se ajustan a nuestro esquema inductivo basado en la recursión del lema 10.2.9. Una de ellas consiste en recorrerla por filas. Es decir, suponer probado el enunciado para todos los grafos de las filas con $m \leq t$, y deducir de ahí la propiedad para un grafo en la fila $m = t+1$. La otra[37] consiste en recorrerla por diagonales; esto es, partir de la hipótesis de que la afirmación es cierta para los polinomios cromáticos de todos los grafos ubicados en casillas de coordenadas $n + m \leq t$, para concluir lo que queremos para un grafo con $n + m = t+1$. Véase la figura para este segundo procedimiento y obsérvese que en él pasamos a una inducción unidimensional, en la suma de número de vértices más número de aristas. Compruébese que, en ambos casos, los grafos $G \setminus \{a\}$ y G_a viven en la zona de la hipótesis de inducción. Vamos, sin más dilación, con las propiedades del polinomio cromático. Empezamos, como corresponde, comprobando que:

Lema 10.2.10 *Dado un grafo G con n vértices, $P_G(k)$ es un polinomio en k, de grado n, mónico, y con coeficientes enteros.*

Demostración. Recuerde, lector, que un polinomio es mónico si el coeficiente del término de mayor grado es un 1.

Ponemos en funcionamiento el algoritmo come-aristas aplicado al grafo G. El resultado es que podemos escribir $P_G(k)$ como combinación lineal de polinomios cromáticos de grafos vacíos N_t, para diversos valores de t; esto es, como combinaciones lineales de términos del tipo $a_t\, k^t$, donde a_t es el número que da cuenta de las veces que aparece (con signos + ó −) cada grafo vacío N_t en el resultado del algoritmo. Eso es, justamente, un polinomio en k. Por la propia estructura del algoritmo, los a_t son números enteros. Además, los grafos vacíos que se obtienen al aplicar el algoritmo no pueden tener más de n vértices (los que tiene el

[37]La tercera, por columnas, no es tan apropiada.

propio G), así que el grado de $P_G(k)$ no puede ser mayor que n; de hecho, es justamente n, pues aparece con seguridad (al menos) un grafo vacío con n vértices, que se corresponde con la secuencia de pasos en las que se van eliminando todas las aristas y ningún vértice. En realidad, sólo puede aparecer una vez ese grafo vacío con n vértices, así que el coeficiente de k^n es un 1.

Una demostración más formal procede por inducción: partimos de la hipótesis de que, para todo grafo G con $|A(G)| \leq m$ se tiene que $P_G(k)$ es un polinomio en k con coeficientes enteros, de grado coincidente con el número de vértices de G, y mónico. Sea H un grafo cualquiera con $m+1$ aristas y con, digamos, n vértices. Seleccionamos una arista a de H y escribimos

$$P_H(k) = P_{H\setminus\{a\}}(k) - P_{H_a}(k)\,.$$

Como $H \setminus \{a\}$ tiene m aristas y n vértices, y H_a tiene, a lo sumo, m aristas (y $n-1$ vértices), por hipótesis de inducción, los dos términos de la derecha son polinomios en k con coeficientes enteros, y mónicos; uno es de grado n, y el otro de grado $n-1$. Por lo tanto, $P_G(k)$ es un polinomio en k, de grado n, con coeficientes enteros, y el coeficiente de k^n es un 1. ■

Consulte el lector el enfoque alternativo del lema **??**, y también el del ejercicio 10.2.20.

Ahora ya podemos escribir que, si G tiene n vértices, su polinomio cromático es de la forma

$$P_G(k) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j\, k^j\,,$$

donde los números α_j son enteros, y $\alpha_n = 1$. Analizamos ahora esta sucesión de coeficientes $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ y su relación con diversas características del grafo en cuestión.

La primera observación es casi inmediata:

Lema 10.2.11 *Sea $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ la sucesión de coeficientes del polinomio cromático $P_G(k)$ de un grafo G con n vértices. Entonces,*

a) $\alpha_0 = 0$*;*

b) *si G no es un grafo vacío,* $\sum_{j=0}^{n} \alpha_j = 0$.

DEMOSTRACIÓN. a) Siempre ocurre que $P_G(0) = 0$. b) Si G contiene aristas, entonces no se puede colorear con un único color, y por tanto $P_G(1) = 0$. ■

El siguiente resultado relaciona la conexión del grafo con los coeficientes de los términos de grado bajo.

Lema 10.2.12 a) *Si G es conexo, entonces $\alpha_1 \neq 0$.*

b) *Si G tiene $r \geq 2$ componentes conexas, entonces $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{r-1} = 0$, y $\alpha_r \neq 0$.*

DEMOSTRACIÓN. a) Si G no es conexo, $P_G(k)$ será el producto (al menos dos) polinomios cromáticos, ninguno de los cuales tiene término independiente, y por tanto la menor potencia de k que puede aparecer en $P_G(k)$ es k^2. Así que, si G no es conexo, se tiene que $\alpha_1 = 0$.

b) Si $G_1, \dots, G_r$ $(r \geq 2)$ son las componentes conexas de un grafo G, entonces

$$P_G(k) = \underbrace{P_{G_1}(k) \cdot P_{G_2}(k) \cdots P_{G_r}(k)}_{\text{todos con término independiente nulo}} = \alpha_r \underbrace{k^r}_{\text{menor grado}} + \alpha_{r+1}\, k^{r+1} + \cdots\,,$$

y $\alpha_r \neq 0$, pues es el producto de los coeficientes (que son no nulos, por la parte a)) de los términos en k de los polinomios cromáticos de cada componente. ■

Registramos en el siguiente resultado unas cuantas propiedades adicionales. Recomendamos al lector concienzudo que compruebe que todas ellas se verifican en los ejemplos calculados anteriormente.

Lema 10.2.13 *Sea $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, con $\alpha_0 = 0$ y $\alpha_n = 1$, la sucesión de coeficientes del polinomio cromático $P_G(k)$ de un grafo G con n vértices y m aristas.*

a) $\alpha_{n-1} = -m$;

b) *los coeficientes alternan en signo: $\alpha_n = 1$, $\alpha_{n-1} = -m$, luego α_{n-2} es positivo, α_{n-3} es negativo, etc.*

c) *si G tiene $r \geq 1$ componentes conexas, todos los coeficientes, desde α_n hasta α_r, son no nulos;*

En la demostración que sigue, usaremos repetidamente la recursión

$$P_G(k) = P_{G\setminus\{a\}}(k) - P_{G_a}(k),$$

donde, recordemos, si G tiene n vértices y m aristas, $G \setminus \{a\}$ tiene n vértices y $m-1$ aristas, mientras que G_a tiene $n-1$ vértices y $\leq m-1$ aristas. La recursión se puede reescribir como

$$(\star) \qquad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, k^j = \sum_{j=1}^{n} \beta_j\, k^j - \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j\, k^j\,,$$

llamando α_j, β_j y γ_j a los coeficientes de $P_G(k)$, $P_{G\setminus\{a\}}(k)$ y $P_{G_a}(k)$, respectivamente.

Demostración. La hacemos por inducción en $n+m$ (número de vértices más número de aristas del grafo). Dejamos al lector la comprobación, en cada caso, del caso de partida.

a) Usamos $(\star)$, la observación de que los polinomios cromáticos son mónicos, y la hipótesis de inducción (otra vez sobre $G \setminus \{a\}$) para escribir

$$P_G(k) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j\, k^j - \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j\, k^j = k^n + \big[-(m-1) - 1\big]\, k^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-2} (\beta_j - \gamma_j)\, k^j\,,$$

de donde obtenemos que el coeficiente del término en k^{n-1} de $P_G(k)$ es, justamente, $-m$.

b) Supongamos que n es par (un argumento análogo valdría para n impar; pero no se olvide de hacerlo, querido lector). Por hipótesis de inducción, podemos escribir $P_{G\setminus\{a\}}$ y P_{G_a} de la siguiente manera:

$$P_{G\setminus\{a\}}(k) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j\, \widetilde{\beta}_j\, k^j \qquad \text{y} \qquad P_{G_a}(k) = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j-1}\, \widetilde{\gamma}_j\, k^j\,,$$

donde todos los $\widetilde{\beta}_j$ y $\widetilde{\gamma}_j$ son *no negativos*. Ahora reescribimos ($\star$) a la luz de esta información:

$$P_G(k) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j\, k^j - \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j\, k^j = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j\, \widetilde{\beta}_j\, k^j - \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j-1}\, \widetilde{\gamma}_j\, k^j = k^n + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j\, (\widetilde{\beta}_j + \widetilde{\gamma}_j)\, k^j\,,$$

que nos dice que los coeficientes de $P_G(k)$ van alternados de signo.

Dejamos que el lector use este mismo argumento para probar el apartado d). ■

Polinomio cromático y principio de inclusión/exclusión. Ya disponemos de mucha información sobre los coeficientes de un polinomio cromático. Pero, insaciables en nuestra sed de conocimiento, nos gustaría saber, por ejemplo, cuánto vale el coeficiente α_{n-2}. Y aunque a estas alturas ya intuimos (aún más, estaríamos dispuestos a asegurar) que el valor de α_{n-2} tendrá que ver con alguna característica intrínseca del grafo, los ejemplos vistos no nos permiten conjeturar cuál será ese valor, por lo que no podemos utilizar la maquinaria de prueba por inducción que tan fructífera se ha mostrado hasta ahora.

Para proseguir nuestro análisis, recurrimos al principio de inclusión/exclusión, que subyace en todo lo relacionado con los polinomios cromáticos. Recordemos que colorear con k colores un grafo G de n vértices y m aristas es lo mismo que formar n-listas con k símbolos y con las restricciones (entre posiciones) que señalen las m aristas. Ya en este lenguaje de listas, llamando $\mathcal{L}$ al conjunto de las n-listas con k símbolos, empezamos por definir los conjuntos

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\text{listas de } \mathcal{L} \text{ con el mismo símbolo en las posiciones que indique la arista } 1\}\,, \\ &\;\vdots \\ A_m &= \{\text{listas de } \mathcal{L} \text{ con el mismo símbolo en las posiciones que indique la arista } m\}\,. \end{aligned}$$

Pasando al complementario,

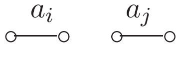
$$P_G(k) = \#\,\text{listas legales} = |\mathcal{L}| - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m|.$$

El número total de listas $|\mathcal{L}|$ es, por supuesto, k^n. Ahora, siguiendo el paradigma del principio de inclusión/exclusión, vamos a evaluar el tamaño de todas las posibles intersecciones.

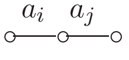
Para calcular $|A_i|$, para cada i, basta elegir el símbolo común a las dos posiciones marcadas por la arista i, para luego rellenar las restantes $n-2$ posiciones. Por tanto,

$$|A_i| = k \cdot k^{n-2} = k^{n-1} \qquad \text{para cada } i = 1, \ldots, m.$$

Vamos con las intersecciones dos a dos. Llamemos a_i a la arista asociada al conjunto A_i y a_j a la asociada a A_j. Sólo hay dos configuraciones posibles:



Quedan $n-4$ vértices libres y hay que elegir dos colores para los dos pares de vértices a los que llegan a_i y a_j $\to\ |A_i \cap A_j| = k^{n-4}\, k^2 = k^{n-2}$

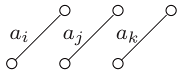


Quedan $n-3$ vértices libres y hay que elegir un color para los tres vértices a los que llegan a_i y a_j $\to\ |A_i \cap A_j| = k^{n-3}\, k = k^{n-2}$

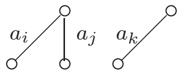
En ambos casos obtenemos k^{n-2}; por tanto,

$$|A_i \cap A_j| = k^{n-2} \qquad \text{para todo } i \neq j.$$

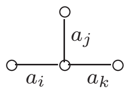
Para las intersecciones 3 a 3 (que involucran 3 aristas) hay cinco configuraciones posibles:



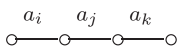
Quedan $n-6$ vértices libres y hay que elegir tres colores para los tres pares de vértices a los que llegan a_i, a_j y a_k $\rightarrow |A_i \cap A_j \cap A_k| = k^{n-6}\, k^3 = k^{n-3}$



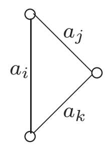
Quedan $n-5$ vértices libres y hay que elegir dos colores para los dos conjuntos de vértices a los que llegan a_i, a_j y a_k $\rightarrow |A_i \cap A_j \cap A_k| = k^{n-5}\, k^2 = k^{n-3}$



Quedan $n-4$ vértices libres y hay que elegir un color para los vértices a los que llegan a_i, a_j y a_k $\rightarrow |A_i \cap A_j \cap A_k| = k^{n-4}\, k = k^{n-3}$



Quedan $n-4$ vértices libres y hay que elegir un color para los dos vértices a los que llegan a_i, a_j y a_k $\rightarrow |A_i \cap A_j \cap A_k| = k^{n-4}\, k = k^{n-3}$



Quedan $n-3$ vértices libres y hay que elegir un color para los vértices a los que llegan a_i, a_j y a_k $\rightarrow |A_i \cap A_j \cap A_k| = k^{n-3}\, k = k^{n-2}$

La última configuración es la que menos vértices involucra y, como vemos, es especial. Así que resulta necesario contabilizar cuántas configuraciones como esa aparecen en el grafo, es decir, cuánto "triángulos" contiene el grafo en cuestión. El polinomio cromático se escribe, con la información de que disponemos hasta ahora como

$$\begin{aligned}
P_G(k) &= k^n - \Big[\sum_i |A_i| - \sum_{i\neq j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i\neq j\neq k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots\Big] \\
&= k^n - \Big\{\binom{m}{1} k^{n-1} - \binom{m}{2} k^{n-2} + \Big[\binom{m}{3} - \#\text{triángulos}\Big] k^{n-3} + \#\ \text{triángulos}\, k^{n-2} + \cdots\Big\} \\
&= k^n - m\, k^{n-1} + \Big[\binom{m}{2} - \#\ \text{triángulos}\Big] k^{n-2} + \cdots,
\end{aligned}$$

donde m, recordemos, es el número de aristas del grafo. Este argumento nos vuelve a dar que los dos coeficientes de los términos de mayor grado son 1 y $-m$, coo ya sabíamos. Pero desvela también que

$$\alpha_{n-2} = \binom{m}{2} - \#\,\text{triángulos},$$

que de nuevo es un resultado sugerente, pues la cantidad de la derecha está ligada a propiedades estructurales del grafo.

En realidad, para concluir que la afirmación anterior es cierta, deberíamos comprobar que en el resto del polinomio cromático, que arriba hemos representado con puntos suspensivos (y que se corresponde con configuraciones que involucran 4 o más aristas), no aparecen más términos en k^{n-2}. Observe el lector que la inducción no parece ahora el método adecuado, pues no tenemos información sobre el número de triángulos que tienen los grafos $G \setminus \{a\}$ y G_a. Necesitamos un argumento de corte distinto.

Veamos. Recordemos que intentamos calcular $|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_l|$, donde $l \geq 4$. Cada conjunto de listas A_j está "asociado" a una arista a_j. El subgrafo H de G formado por las aristas $a_1, \dots, a_l$ consta de un cierto número t de vértices y de un cierto número r de componentes conexas. Las listas que queremos contar se corresponden con "coloraciones" de G en las que los vértices de cada arista a_j llevan el *mismo* color. Así que "coloreamos" primero H con esta peculiar receta, pintando los vértices de cada componente conexa con el mismo color (hay k^r formas de hacerlo). Hecho esto, tenemos libertad para colorear los $n-t$ vértices restantes de G. Y así

$$|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_l| = k^{n-t}\, k^r = k^{n-t+r}\,.$$

Si ahora comprobáramos que $n-t+r \leq n-3$, o, en otras palabras, que $r \leq t-3$, habríamos concluido el argumento: los siguientes términos del polinomio no podrían contener potencias k^{n-2}. El siguiente resultado da fin a nuestras preocupaciones:

Proposición 10.2.14 *Sea G un grafo con r componentes conexas, t vértices y l aristas.*

a) *Si G no tiene vértices aislados, entonces $r \leq t/2$.*
b) *Si G no tiene vértices aislados y además $l \geq 4$, entonces $r \leq t-3$.*

DEMOSTRACIÓN. La parte a) es directa, pues cada componente conexa ha de tener, como mínimo, dos vértices. Para la segunda parte,

- si $t \geq 6$, se cumple que $t/2 \leq t-3$, y la parte a) nos permite concluir el resultado;
- si $t = 5$, queremos comprobar que $r \leq 2$. Pero es que si hubiera tres (o más) componentes conexas, tendríamos vértices aislados. Y si $t = 4$, sólo puede suceder que $r = 1$, pues recordemos que al menos hay cuatro aristas. ■

E. Coda de asombro

Paremos un momento. Recuperemos el resuello. Reflexionemos durante unos breves momentos: hemos creado un objeto abstracto, los grafos. Son objetos matemáticos que aportan un lenguaje de representación. Hemos ampliado el lenguaje introduciendo coloreados de vértices y nos hemos puesto a contar formas distintas de colorear. Las hemos codificado en otro objeto, que es un polinomio, y hemos estudiado sus coeficientes, que resulta que tienen propiedades tales como que *siempre* alternan en signo, o que el segundo coeficiente. . .

El grado de sorpresa y asombro aumenta si nos aseguran que, como es el caso, el valor del polinomio cromático en $k = -1$ tiene una interpretación combinatoria: en concreto,

$$(-1)^{|V(G)|}\, P_G(-1)$$

coincide con el número de orientaciones acíclicas[38] del grafo G. ¡Esperen!, ¿evaluar el polinomio cromático en $k = -1$? Hasta ahora, k era el número de colores con los que coloreábamos, y por tanto, de natural, sólo tendría sentido considerar valores de k no negativos. ¿Qué significado tiene $k = -1$?

Pues todo eso, y bastante más[39], estaba en el objeto que hemos... ¿creado? ¿O estaba dentro, por sí sólo, por su cuenta? ¿Subyacía y lo hemos desvelado? ¿Lo hemos... descubierto?

Cuesta no ser platónico cuando habitamos el mundo virtual de los objetos matemáticos...

[38]Dado un grafo, podemos asignar un sentido a cada una de sus aristas ("orientarlo"), para convertirlo en un grafo dirigido. Estas orientaciones serán *acíclicas* si no contienen ciclos dirigidos. Véase el ejercicio 10.2.21.

[39]Como ciertas curiosas propiedades de los ceros de un polinomio cromático. Birkhoff introdujo la noción de polinomio cromático en conexión con el problema de coloreado los mapas, y precisamente con la esperanza de que el estudio analítico de los ceros de esta función arrojara luz sobre el problema de los cuatro colores.