5.3. Particiones y descomposiciones

Una cuestión habitual, casi central, en la combinatoria consiste en contar de cuántas maneras se puede partir, repartir o descomponer un cierto objeto conocido en piezas más sencillas. En esta sección analizamos las tres siguientes cuestiones:

- ¿de cuántas maneras se puede partir un *conjunto* en *subconjuntos* suyos?,
- ¿cuántas *permutaciones* hay con un determinado número de *ciclos* (disjuntos)?,
- o, finalmente, ¿de cuántas maneras se puede escribir un *entero* (positivo) como suma[70] de *enteros* también positivos?,

que darán lugar, como podrá comprobar el lector en las páginas siguientes, a nuevas familias de números combinatorios, conexiones insospechadas y preguntas en el límite de lo desconocido[71].

5.3.1. Particiones de conjuntos

Como ya apuntamos en la sección 2.3, partir un conjunto en subconjuntos (disjuntos dos a dos), para luego aplicar la regla de la suma, es una de las estrategias básicas de la Combinatoria. La cuestión que aquí nos incumbe es saber *de cuántas maneras distintas* se puede partir un conjunto dado.

Sea $\mathcal{X}$ un conjunto con n elementos, que supondremos, como hacemos habitualmente, que son los números $\{1,\dots,n\}$. A una colección de subconjuntos $\{A_1, A_2, \dots A_k\}$ de $\mathcal{X}$ tales que

a) forman una partición de $\mathcal{X}$, es decir, $\mathcal{X} = A_1 \cup \cdots \cup A_k$, y $A_i \cap A_j = \emptyset$ para cada $i \neq j$;
b) y son no vacíos, esto es, $A_i \neq \emptyset$ para cada $i = 1,\dots,k$.

nos referiremos como una **partición de $\mathcal{X}$ en k bloques no vacíos**. Los bloques son los subconjuntos A_i. Como condiciones adicionales, supondremos que

- por un lado, *el orden de los elementos dentro de cada bloque es irrelevante* (esto está en realidad implícito en el uso de subconjuntos);
- y por otro, que *el orden de presentación de los bloques* también es irrelevante.

Atención, querido lector, esta última propiedad significa que, pese a que nombramos los bloques como $A_1,\dots,A_k$, no se debe suponer que haya orden alguno entre ellos: A_1 no es el “primer” bloque, sino simplemente uno de los de la colección (en un momento consideraremos también particiones “ordenadas”). Si, por ejemplo, $\mathcal{X}$ fuera el conjunto $\{1,2,3\}$, tendríamos una única partición con un bloque (el propio conjunto $\{1,2,3\}$), tres particiones con dos bloques,

$$\{1,2\}\cup\{3\}, \qquad \{1,3\}\cup\{2\}, \qquad \{2,3\}\cup\{1\}\,;$$

[70]Sí, suma, y no producto. Descomponer un entero, por ejemplo como producto de primos, no es un asunto muy estimulante desde el punto de vista combinatorio, pues esa factorización es única. Sin embargo, escribirlo como producto de enteros cualesquiera (mayores que 1) sí que es una cuestión más rica: véase el ejercicio 5.3.15.
[71]The twilight zone. O Cuarto milenio.

y una partición en tres bloques, $\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}$. Ya no hay más, pues queremos que los bloques no sean vacíos. Insistimos en que, por ejemplo, $\{1,2\} \cup \{3\}$, $\{3\} \cup \{1,2\}$ ó $\{3\} \cup \{2,1\}$ representan la misma partición.

Ésta es la cuestión: de cuántas maneras se puede partir, en k bloques no vacíos, un conjunto con n elementos. Para la respuesta traemos a escena un nuevo símbolo, $S(n,k)$, y un nuevo nombre, la segunda gran familia[72] de números combinatorios de este texto: los **números de Stirling de segunda especie**:

$$S(n,k) = \#\big\{ \text{particiones distintas del conjunto } \{1,\dots,n\} \text{ en } k \text{ bloques no vacíos} \big\}.$$

Sí, querido lector: los hay también de primera especie; véase la sección 5.3.2.

En un lenguaje alternativo, $S(n,k)$ cuenta el número de posibles distribuciones de n bolas numeradas (antes, los elementos del conjunto) en k cajas indistinguibles (los bloques de la partición), de manera que ninguna caja quede vacía.

Estos números de Stirling, cuyas propiedades vamos a analizar en esta sección, dan respuesta[73] a la cuestión combinatoria anterior. Pero también permiten calcular eficazmente el número de aplicaciones sobreyectivas entre dos conjuntos, asunto que quedó pendiente en el ejemplo 5.1.8, y aparecen asimismo en una cuestión de corte algebraico: un cambio de base entre polinomios, en el que intervienen en comandita junto a sus hermanos, los Stirling de primera especie. Vea el lector interesado el apartado B de la sección 5.3.2.

En ocasiones necesitaremos contar el *número total* de particiones de $\{1,\dots,n\}$ en bloques no vacíos (*sin atender al número de bloques* de que constan). Clasificando estas particiones en función del número de bloques de que constan, y aplicando la regla de la suma, se deduce inmediatamente que el número de particiones distintas del conjunto $\{1,\dots,n\}$ (o de distribuciones de n bolas numeradas en cajas idénticas sin que queden cajas vacías) es

$$\sum_{k=1}^{n} S(n,k) = B(n),$$

donde ya hemos avanzado una notación específica para referirnos a estos números: $B(n)$, los llamados **números de Bell**[74]. Por ejemplo, como para $n=3$ los valores de los números de Stirling son: $S(3,3)=1$, $S(3,2)=3$ y $S(3,1)=1$, resulta que hay $B(3)=5$ particiones distintas del conjunto $\{1,2,3\}$. El apartado E contiene un análisis detallado de estos $B(n)$.

[72]¿Y quién fue la primera? ¡Ah!, sí, los coeficientes binómicos. ¡Oigan!, se tiraron más de 70 páginas con esa familia, vayan aquí más ligeritos, porfa.

[73]¿Pero qué respuesta?, si sólo los han bautizado.

[74]En honor del matemático Eric Temple Bell (1883–1960), escocés de nacimiento, aunque viviera la mayor parte de su vida en Estados Unidos. Bell es conocido como autor de algunos libros, como “Men of Mathematics”, que contenían entretenidas reseñas biográficas de matemáticos; aunque hay quien dice por ahí que algunas eran un tanto imaginativas y algo carentes de rigor histórico. Y también como escritor de obras de ciencia ficción, bajo el seudónimo de John Taine. Por cierto, los autores juran haber visto en alguna ocasión el término “campana de Bell” para describir la curva de forma acampanada conocida como curva gaussiana y que presentaremos en el capítulo 17; esto no es obra de Bell, sino sin duda de un traductor disléxico: *bell* significa campana en inglés. Como “por cierto” adicional, parece ser que el primer estudio sistemático de estos números de Bell $B(n)$ no fue de Bell, sino de Ramanujan.

Particiones ordenadas y no ordenadas. La definición oficial de los números de Stirling $S(n,k)$ trata con particiones en k bloques *no ordenados*. Pero claro, los bloques de cada partición de éstas se pueden ordenar de $k!$ maneras distintas, dando lugar a $k!$ *particiones ordenadas* distintas:

$$\begin{aligned}\widetilde{S}(n,k) &= \#\big\{\text{ particiones } \textit{ordenadas} \text{ del conjunto } \{1,\dots,n\} \text{ en } k \text{ bloques no vacíos}\big\}\\ &= k! S(n,k)\,.\end{aligned}$$

En lo que sigue apenas usaremos el símbolo $\widetilde{S}(n,k)$, y tampoco bautizaremos a estos números como "números de Stirling de segunda especie ordenados"[75]. Sin embargo, a la versión ordenada de los números de Bell $B(n)$ (el número total de particiones de $\{1,\dots,n\}$ en bloques no vacíos), sí que nos referiremos como los **números de Bell ordenados**,

$$\widetilde{B}(n) = \sum_{k=1}^{n} k!\,S(n,k),$$

que cuentan el número total de particiones ordenadas de un conjunto con n elementos.

A. Preliminares sobre los $S(n,k)$

Una nueva familia aparece para poblar el hábitat combinatorio. Como hicimos con los coeficientes binómicos, trataremos de obtener una fórmula explícita para ellos o, al menos, una regla de recurrencia que facilite su cálculo.

Empezamos, como corresponde, determinando los rangos para los parámetros n y k. Por un lado, exigiremos que $n \geq 1$, pues si el conjunto ya es vacío, el problema (partir en bloques no vacíos) carece de sentido. Pero si, fijado un cierto n, ocurriera que $k > n$, entonces no podríamos construir partición alguna (faltarían símbolos para llenar los bloques), así que

$$S(n,k) = 0 \quad \text{si } k > n.$$

De manera que el rango de interés para las parejas (n,k) es $n \geq 1$ y $1 \leq k \leq n$. Lo que insta a representar a estos números en un "triángulo" como el de los coeficientes binómicos.

Para asuntos de corte más algebraico, como los que analizaremos en el apartado B de la sección 5.3.2, conviene considerar también el caso $k = 0$, e incluso $n = 0$, conviniendo en que $S(n,0) = 0$ si $n \geq 1$ pero, ¡atención!, $S(0,0) = 1$. O de manera más compacta, $s(n,0) = \delta_{n,0}$, usando la notación de la delta de Kronecker de la definición 5.1.27.

Empezamos analizando los "valores frontera" de los números de Stirling de segunda especie: $S(n,n)$ y $S(n,1)$.

Si tenemos n símbolos y pretendemos formar n bloques no vacíos con ellos, sólo queda la posibilidad de situar un símbolo por bloque. Es decir, $S(n,n) = 1$ para cada $n \geq 1$. Permítanos el lector describir esta partición, de manera algo informal pero ilustrativa, como aquélla en la que cada símbolo va "por su cuenta".

[75] Aunque sólo sea porque es larguísimo.

Si de nuevo partimos de n símbolos, pero ahora sólo tenemos un bloque, la única manera de hacer la partición es colocar todos los símbolos en ese bloque. Esto es, $S(n,1)=1$ para cada $n\geq 1$. Esta partición es la de "todos juntos".

Hasta aquí, todo igual al caso de los coeficientes binómicos. Veamos un par de casos más.

EJEMPLO 5.3.1 *El valor de $S(n,n-1)$, para $n\geq 2$.*

Por definición, $S(n,n-1)$ cuenta el número de particiones de $\{1,\dots,n\}$ en $n-1$ bloques no vacíos. Tan ajustado está el número de elementos al de bloques, que sólo hay una configuración posible: la que corresponde a tener un bloque con dos símbolos, y el resto de los símbolos, cada uno en un bloque distinto[76]. Decidir qué configuración de éstas tenemos exige únicamente elegir los dos símbolos van juntos; el resto de los símbolos van cada uno por su cuenta, formando bloques propios. Así que la respuesta final es

$$S(n,n-1)=\binom{n}{2}.$$

♣

EJEMPLO 5.3.2 *El valor de $S(n,2)$, para $n\geq 2$.*

Ahora tenemos dos bloques, y bastará decidir qué elementos van en uno de los bloques (los del otro quedan fijados). Note el lector que no tiene sentido hablar de "primer bloque" y "segundo bloque", pues éstos son indistinguibles. Aún así, emplearemos el truco habitual de asignar un orden auxiliar y ficticio a los bloques, que luego compensaremos al final. Digamos entonces que los bloques son

$$\lfloor \text{Bloque 1} \rfloor \quad \lfloor \text{Bloque 2} \rfloor$$

En el primero, en principio, podemos situar cualquier subconjunto de $\{1,\dots,n\}$; y hay 2^n de ellos. Pero no podemos utilizar ni el $\emptyset$ (porque el bloque 1 sería vacío) ni todo $\{1,\dots,n\}$ (porque el bloque 2 quedaría vacío). Así que la respuesta sería 2^n-2.

Ahora debemos compensar el orden espurio que hemos introducido. Digamos que A es un subconjunto de $\{1,\dots,n\}$, una de las 2^n-2 elecciones posibles que citábamos antes. En el proceso que hemos hecho estamos distinguiendo entre

$$\lfloor A \rfloor \ \lfloor \{1,\dots,n\}\setminus A \rfloor \qquad \text{y} \qquad \lfloor \{1,\dots,n\}\setminus A \rfloor \ \lfloor A \rfloor$$

Estas dos configuraciones, vistas como particiones en bloques (esto es, sin orden entre los bloques) son en realidad la misma. Así que la respuesta correcta es

$$S(n,2)=\frac{2^n-2}{2}=2^{n-1}-1\,.$$

Nos gusta, es más sencillo argumentar cuando podemos referirnos a un bloque en concreto. Arriba impusimos un orden ficticio entre bloques, que luego supimos compensar, y que nos permitió hablar de bloque 1 y bloque 2. Un análisis alternativo, que usaremos a menudo, consiste en argumentar sobre el bloque que contiene a un elemento particular, por ejemplo el

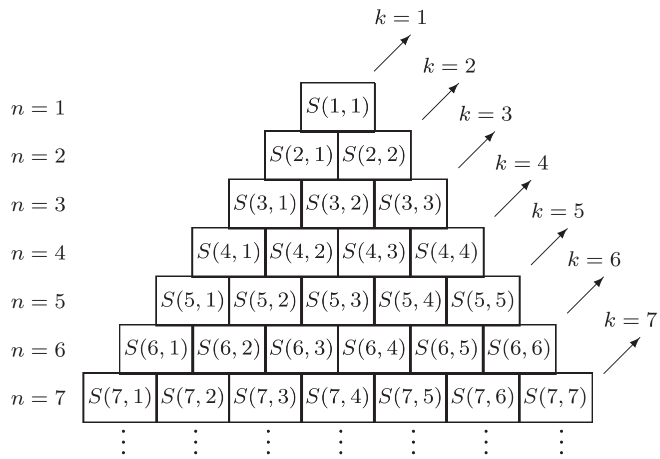
[76] Como hay n símbolos y $n-1$ bloques, por el principio del palomar, necesariamente uno de los bloques ha de llevar al menos dos símbolos. Y ya está, uno debe llevar 2 símbolos, y el resto 1.

elemento n. Ni el primero ni el segundo, ni... simplemente "el bloque que contiene a n". Pero ahora, con un bloque "distinguido", sólo tenemos que decidir, por ejemplo, qué elementos acompañan a n en "su" bloque. La respuesta es directa: hay $2^{n-1} - 1$ posibilidades, todos los posibles subconjuntos (¡con $n-1$ símbolos!, que n ya está colocado), excepto el formado por los símbolos $\{1, \dots, n-1\}$, que dejaría el otro bloque vacío. ♣

Quizás el lector quiera analizar por su cuenta casos más complicados (3 bloques, o quizás $n-2$ ó $n-3$ bloques), como proponemos en el ejercicio 5.3.1. Observará, por un lado, que cada caso requiere un argumento combinatorio ad hoc, y que además el aspecto de las fórmulas que se obtienen no permite albergar muchas esperanzas de llegar a una fórmula general sencilla. Esto ya lo habíamos detectado en los dos anteriores ejemplos: $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$ y $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$, ¡cuán distintos! Esa tal fórmula general existe, aunque es complicada, como podrá comprobar el lector en el apartado C de esta sección. Pero lo que toca ahora es obtener un procedimiento (regla de recurrencia) de cálculo alternativo (y rápido) de estos números.

B. Regla de recurrencia para los $S(n, k)$

Representamos los valores $S(n, k)$ en un triángulo, como en el caso de los coeficientes binómicos. Las coordenadas de cada casilla son (piso) n y (diagonal) k, que ahora recorren unos rangos ligeramente distintos al caso de los coeficientes binómicos. Si conociéramos todos los valores de $S(n, k)$ para un cierto piso n, el número de Bell $B(n)$ correspondiente se obtendría, simplemente, sumándolos. Conocemos ya los valores frontera del triángulo: $S(n, n) = S(n, 1) = 1$ para todo n.



Inspirados por los coeficientes binómicos, querríamos expresar $S(n, k)$ en términos de números de Stirling de primer índice $n-1$. Esto exigiría relacionar particiones de conjuntos con n símbolos con particiones de conjuntos $n-1$ símbolos. Para ello, analizaremos qué puede ocurrir con un bloque especial, por ejemplo el que contiene al elemento n. Caben dos posibilidades excluyentes:

Caso 1. *El bloque que contiene a n no contiene ningún otro elemento.* Una partición de éstas tendrá el siguiente aspecto:

$$\underbrace{\sqcup\ \ \sqcup\ \ \sqcup\ \ \cdots\ \ \sqcup}_{k-1 \text{ bloques}}\ \ \boxed{n}$$

Insistimos: en el esquema anterior no se está suponiendo orden alguno entre bloques, simplemente identificamos el bloque que contiene a n, que en este caso no contiene nada más. Pero ahora, como n va en un bloque (y "por su cuenta"), sólo queda construir una partición del conjunto $\{1,\dots,n-1\}$ en $k-1$ bloques no vacíos, para que en total tengamos k bloques.

Más formalmente, hay una biyección entre el conjunto de las particiones de $\{1,\dots,n\}$ en k bloques en las que n va solo en un bloque y el conjunto de las particiones de $\{1,\dots,n-1\}$ en $k-1$ bloques no vacíos. El diccionario, la biyección, es simplemente "quitar el bloque $\{n\}$" o "añadir el bloque $\{n\}$". De manera que hay $S(n-1,k-1)$ particiones de este primer tipo.

Caso 2. *El bloque que contiene a n tiene, además, otros elementos.* Con la aconsejable prudencia, analizamos primero si la receta del caso anterior sigue siendo de aplicación con un ejemplo sencillo: sea $\mathcal{X}=\{1,2,3,4\}$ y $k=2$. Nos interesan las particiones en las que el bloque con el 4 contiene, además, otros elementos. Dos de ellas serían

$$\{1,2\}\cup\{3,4\} \quad \text{y} \quad \{3\}\cup\{1,2,4\}\,.$$

Ahora no podemos hablar de "quitar el bloque $\{4\}$", pero aún podríamos intentar una regla del tipo "quitar el elemento 4". Pero no, no funciona, porque, por ejemplo,

$$\left.\begin{array}{lcl} \{1,2\}\cup\{3,4\} & \longrightarrow & \{1,2\}\cup\{3\} \\ \{3\}\cup\{1,2,4\} & \longrightarrow & \{1,2\}\cup\{3\} \end{array}\right] \longrightarrow \text{¡dan lugar a la misma partición!}$$

Aún así, seamos perseverantes y no descartemos completamente el argumento. Pensemos en el proceso al revés, "añadir 4". Dada la partición con dos bloques $\{1,2\}\cup\{3\}$, podemos situar el 4 en cualquiera de ellos,

$$\{1,2\}\cup\{3\} \qquad \longrightarrow \qquad \{1,2,4\}\cup\{3\} \quad \text{y} \quad \{1,2\}\cup\{3,4\}$$

para dar lugar a una partición de $\{1,2,3,4\}$ en dos bloques, con el 4 "acompañado".

Argumentamos en general: tenemos las $S(n-1,k)$ particiones del conjunto $\{1,\dots,n-1\}$ en k bloques. Para cada una de ellas, añadimos el elemento n en alguno de los bloques. Tendremos k posibilidades para colocarlo:

$$\underbrace{\{\cdots\}\{\cdots\}\cdots\{\cdots\}}_{k \text{ bloques}} \quad \longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} \{\dots,n\}\{\cdots\}\cdots\{\cdots\} \\ \{\cdots\}\{\dots,n\}\cdots\{\cdots\} \\ \vdots \\ \{\cdots\}\{\cdots\}\cdots\{\dots,n\} \end{array}\right.$$

Dejamos al lector meticuloso que se convenza de que, al recorrer todas las particiones de $\{1,\dots,n-1\}$ en k bloques vamos generando todas las particiones de $\{1,\dots,n\}$ en k bloques en las que n está acompañado, sin repetir ninguna. Como por cada partición del primer tipo obtenemos k del segundo, concluimos que hay $k\,S(n-1,k)$ particiones en este caso 2.

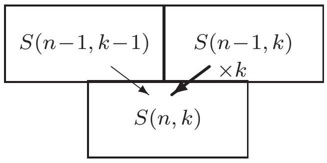
Ya tenemos la regla de recursión que buscábamos:

$$\boxed{S(n,k)=S(n-1,k-1)+k\,S(n-1,k)}$$

que, junto a los valores frontera, codifica toda la información sobre los números $S(n,k)$. Podremos así construir el análogo al triángulo de Pascal, en el que podemos leer, además, sumando por filas, los valores de los números de Bell $B(n)$:

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$B(n)$
$n=1$	1							1
$n=2$	1	1						2
$n=3$	1	3	1					5
$n=4$	1	7	6	1				15
$n=5$	1	15	25	10	1			52
$n=6$	1	31	90	65	15	1		203
$n=7$	1	63	301	350	140	21	1	877

Observe el lector cómo ahora ya no tenemos la simetría del triángulo de los coeficientes binómicos. La regla de recursión se interpreta gráficamente como aparece a la derecha, donde la flecha de la izquierda, más oscura, nos indica que hay que multiplicar (por k) antes de sumar.

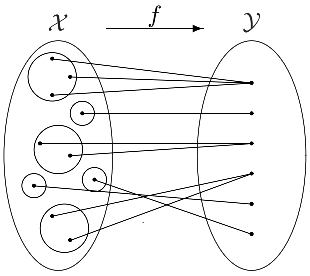


C. Aplicaciones sobreyectivas, rankings y sistemas de elecciones

Ya disponemos de una manera eficiente de calcular los valores de los números $S(n,k)$ mediante una regla de recurrencia. En este apartado vamos a escribir una *fórmula* para los $S(n,k)$ analizando una cuestión combinatoria de interés, la de contar el número de aplicaciones sobreyectivas que puede haber entre dos conjuntos. Esta conexión nos permitirá también obtener una identidad adicional (lema 5.3.2) para los $S(n,k)$, y analizar un par de cuestiones relacionadas con rankings y sistemas de elección social. No está mal.

Vamos a contar cuántas aplicaciones sobreyectivas se pueden establecer entre los conjuntos $\mathcal{X}=\{1,\dots,n\}$ e $\mathcal{Y}=\{1,\dots,k\}$. Para empezar, debe ocurrir que $n\geq k$, pues de lo contrario no podríamos tener una tal aplicación sobreyectiva. El argumento que sigue es directo, y no el del paso al complementario (y posterior aplicación del principio de inclusión/exclusión) del ejemplo 5.1.8. Para *construir* una aplicación sobreyectiva,

- primero partimos el conjunto $\mathcal{X}$ en k bloques no vacíos. Los elementos de cada bloque van a tener una imagen común en $\mathcal{Y}$.
- Y luego asignamos *a cada uno de estos bloques* un elemento de $\mathcal{Y}$, determinando así por completo la aplicación.



El dibujo de la izquierda describe el proceso, en el que primero determinamos los k bloques, y luego les asignamos imagen. El primer paso se puede hacer, como ya sabemos, de $S(n,k)$ maneras distintas. El segundo paso, el de asignar un elemento de $\mathcal{Y}$ a cada bloque, para así determinar la aplicación de que se trata, se puede hacer de $k!$ maneras, pues son k bloques y k elementos de $\mathcal{Y}$ (se trata de una permutación). Hemos probado así que:

Lema 5.3.1 *Para $n \geq 1$ y $1 \leq k \leq n$,*

$$\#\big\{\textit{aplicaciones sobreyectivas de } \mathcal{X} = \{1,\dots,n\} \textit{ en } \mathcal{Y} = \{1,\dots,k\}\big\} = k!\, S(n,k)\,.$$

Observe, lector, que la fórmula anterior se puede extender a otros rangos (por ejemplo $k > n$) usando que $S(n,k) = 0$ si $k > n$. Compare, lector, entre la expresión del lema 5.3.1, que requiere calcular $S(n,k)$ (lo que se puede hacer usando la regla de recurrencia), y la aparatosa suma alternada del ejemplo 5.1.8; y decida luego cuál prefiere[77] usar en sus cálculos. Por ejemplo, el número de sobreyecciones entre un conjunto con 10 elementos y uno con 5 es

$$5!\, S(10,5) \qquad \text{y} \qquad \sum_{j=1}^{5} (-1)^{5-j} \binom{5}{j} j^{10}.$$

Ambas cantidades valen, por cierto, 5 103 000.

Dándole la vuelta al lema 5.3.1 y usando el ejemplo 5.1.8, obtenemos una *fórmula* para los números de Stirling:

$$\boxed{S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{m=1}^{k} (-1)^m \binom{k}{m} m^n}$$

(a la derecha hemos cambiado el índice de sumación, de j a $m = k - j$, y hemos utilizado la simetría de los coeficientes binómicos).

Sí, querido lector: *esta* fórmula nos da el valor de un $S(n,k)$ cualquiera, incluso cuando $n < k$, si tiene a bien recordar el resultado del lema 5.1.9.

Por ejemplo, para el caso $k = 2$,

$$S(n,2) = \frac{(-1)^2}{2!} \sum_{m=1}^{2} (-1)^m \binom{2}{m} m^n = \frac{1}{2}\left[-\binom{2}{1} + \binom{2}{2} 2^n\right] = \frac{2^n - 2}{2}\,,$$

que es lo que obtuvimos en el ejemplo 5.3.2. Para los casos $k = n$ y $k = n - 1$, las fórmulas correspondientes son:

$$S(n,n) = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{m=1}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} m^n \quad \text{y} \quad S(n,n-1) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{m=1}^{n-1} (-1)^m \binom{n-1}{m} m^n\,.$$

La primera suma vale 1, y la segunda $\binom{n}{2}$, como ya se ha mencionado anteriormente. Quizás el lector algo inconsciente quiera intentar una comprobación algebraica de estas identidades.

Esta conexión entre los números $S(n,k)$ y las aplicaciones sobreyectivas nos lleva también al siguiente resultado, que como veremos más adelante (apartado B de la sección 5.3.2) explica en parte el interés del bueno de Stirling por los números que ahora llevan su nombre.

[77] Hombre, si de un método me dicen que es eficiente, y del otro que es aparatoso, ¿no creen que no dejan mucho margen al libre albedrío?

Lema 5.3.2 *Dado un entero $n \geq 1$, y para todo $x \in \mathbb{R}$,*

$$x^n = \sum_{j=1}^{n} x(x-1)\cdots(x-j+1)\, S(n,j).$$

Demostración. Supongamos primero que x es un entero positivo, digamos $x = k$. Sabemos que, si $|\mathcal{X}| = n$ y $|\mathcal{Y}| = k$, hay un total de k^n aplicaciones $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ distintas. Vamos a clasificar estas aplicaciones en función del número de elementos que realmente estén en la imagen de la aplicación. Llamemos j a a ese número (el de elementos de $\mathcal{Y}$ que realmente tienen preimagen, o directamente el tamaño de la imagen de la aplicación). El parámetro j se moverá entre 1 y n. Ahora, para cada j,

1. decidimos *qué* elementos de $\mathcal{Y}$ tienen preimágenes (lo podremos hacer de $\binom{k}{j}$ maneras);
2. y una vez que hemos decidido a qué j elementos "llega" la aplicación, sólo resta construir una aplicación sobreyectiva a estos j elementos.

Aplicando las reglas de la suma y del producto, llegamos a que

$$k^n = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} j!\, S(n,j) = \sum_{j=1}^{n} k(k-1)\cdots(k-j+1)\, S(n,j)\,.$$

En la escritura de la derecha hemos cancelado los factoriales. Como la suma involucra coeficientes binómicos, podríamos escribir, como límite superior de sumación, n, $\min(n,k)$, o incluso $+\infty$.

Saltamos ahora, y sólo por un momento, al mundo de los polinomios: la identidad anterior nos dice que los polinomios (de grado n)

$$x^n \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{n} x(x-1)\cdots(x-j+1)\, S(n,j)$$

coinciden en todos los valores de x enteros (y positivos). El lector versado en asuntos polinómicos (consúltese, si no, el capítulo 7), sabrá que esto supone que, en realidad, ambos polinomios han de ser el mismo. ■

Ejemplo 5.3.3 *Rankings y sistemas de elección social.*

A las próximas elecciones se presentan n partidos políticos. Cada elector los ordena, según sus preferencias, en diversas categorías: los que más le gustan, los de la siguiente categoría, etc. Obsérvese que se permiten "empates" entre preferencias. Llamaremos **ranking**[78] a cada una de estas ordenaciones.

Por ejemplo, si $n = 2$, y los partidos fueran A y B, tendríamos tres rankings distintos: A y B por igual, primero A y luego B, o primero B y luego A. Compruebe el lector, por (cuidadosa) enumeración, que con tres partidos hay 13 rankings posibles.

[78] O ranquin. Estaría bien hacer un ranquin de güisquis y yintonics vestidos con unos bluyines. La RAE lo aprobaría.

Veamos el recuento en el caso general de n partidos. Si nos interesaran sólo rankings con (exactamente) k categorías, entonces el recuento exigiría distribuir a los n partidos en esas k clases, sin dejar ninguna vacía: esto es, formar una aplicación sobreyectiva. De manera que rankings con k categorías hay $k!S(n,k)$, y, clasificando por el número de categorías,

$$\#\text{rankings} = \sum_{k=1}^{n} k!\, S(n,k) = \widetilde{B}(n),$$

donde hemos usado la notación $\widetilde{B}(n)$ para designar a los números de Bell ordenados, según convinimos al comienzo de este apartado.

Consideremos ahora un conjunto de N votantes. Cada uno tiene su ranking personal. A la lista de las N opiniones individuales nos referiremos como un **ranking social**. El número de ranking sociales distintos que hay es

$$\widetilde{B}(n)^N,$$

sin más que observar que un ranking social es una lista (de longitud N) formada por los rankings individuales.

Bien: ya tenemos los n partidos, los rankings confeccionados por los N electores... ¿qué falta? Un procedimiento que, a la vista de la opinión colectiva, sea capaz de extraer un ranking que la resuma de alguna manera. Por ejemplo, podría consistir simplemente en leer el ranking social y quedarse con la opinión del primer votante, lo que en términos matemáticos llamaríamos una proyección[79] (sobre la primera coordenada); o quizás en seleccionar el ranking que más veces aparece; o elegir uno que minimice (en cierto sentido por precisar) la "distancia" (esto es lo que hay que precisar) a cada uno de los rankings individuales; o...

Cada una de estas posibles funciones, que toman las listas de N rankings individuales, y devuelven un ranking (que por cierto no tiene por qué coincidir necesariamente con ninguno de los rankings individuales), es conocida como un **sistema de elección social** (o máquina de Arrow). Observe, lector, que

$$\#\,\text{máquinas de Arrow} = \widetilde{B}(n)^{(\widetilde{B}(n)^N)},$$

que es un número absolutamente descomunal, casi inimaginable. Por ejemplo, con $n = 3$ partidos y un (escuálido) cuerpo electoral de $N = 3$ votantes, hay algo más de 10^{2447} (sí, han leído bien) máquinas de Arrow distintas.

¡Bueno!, dirá el lector, pero es que *no todas* estas funciones son razonables o admisibles. Por ejemplo, aquí estamos dando como válida la función que a una elección colectiva cualquiera le asocia, por ejemplo, el ranking con el partido 1 en primera posición y el resto empatados en la segunda; una elección que no tendrá nada que ver (en general) con la opinión colectiva de partida.

Además, lo de permitir empates..., quizás deberíamos exigir, a nuestro maduro y responsable cuerpo de electores, que supiera diferenciar con nitidez entre las distintas alternativas. Bien, ¿qué ocurriría si en un ranking de n partidos no permitiéramos empates? Entonces,

[79]Y en román paladino, una dictadura; recuérdese el apartado 5.2.3.

observe el lector, habrá muchas menos de las $\widetilde{B}(n)$ anteriores; de hecho hay exactamente $n!$, pues cada ranking sin empates es una ordenación de los n elementos. Lo que resulta un alivio sólo momentáneo, porque el número de máquinas de Arrow en este caso resulta ser $(n!)^{(n!^N)}$, que para $n = N = 3$ es ya un apabullante 10^{169}.

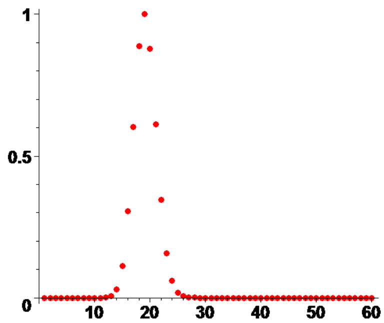
Lo asombroso del asunto es que, en este universo tan descomunal de máquinas de Arrow, no existe ninguna que cumpla unas cuantas condiciones naturales. Esto es un teorema de Arrow[80], un teorema de imposibilidad, que parafraseado en lenguaje de la calle, significa que no hay sistema electoral "perfecto". Tome nota, lector, para sus acaloradas discusiones sobre sistemas D'Hont y similares. ♣

D. Tamaño y forma de los números de Stirling $S(n,k)$

La presencia del factor k en la regla de recurrencia

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k\,S(n-1,k)$$

rompe la simetría que sí tiene la recurrencia análoga para los coeficientes binómicos. Esto tiene dos consecuencias inmediatas: por un lado, cada $S(n,k)$ será en general mayor (mucho mayor, de hecho) que el correspondiente $\binom{n}{k}$; por otro, la forma de los $S(n,k)$, para n fijo, no será tan simétrica como la de sus equivalentes binómicos.



A la izquierda hemos representado los valores de los $S(n,k)$ para $n = 60$, convenientemente reescalados (de manera que el valor máximo es 1). Si el lector compara esta figura con la de los coeficientes binómicos de la sección 5.1.1 (apartado D), podrá apreciar sus similitudes y diferencias: se trata también de una sucesión primero creciente y luego decreciente, con un único máximo. Pero, a diferencia del caso binómico, aquí el máximo se sitúa bastante a la izquierda de la "mitad" del rango. ¿Es ésta la situación general? Es decir, ¿será la sucesión $S(n,k)$, para n fijo, unimodal?, ¿habrá siempre un único máximo? ¿En qué valor de k se sitúa este hipotético máximo?

Antes de abordar estas cuestiones, reseñamos las siguientes cotas para el tamaño de $S(n,k)$:

Lema 5.3.3 *Para todo $n \geq 1$ y todo $1 \leq k \leq n$,*

$$\frac{k^n}{k^k} \leq S(n,k) \leq \frac{k^n}{k!}.$$

Lector, le recordamos ahora, del lema 5.1.10, la acotación análoga para los coeficientes binómicos:

$$\frac{n^k}{k^k} \leq \binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}.$$

[80] En honor de Kenneth Arrow (1921-), quién lo enunció en el artículo "A difficulty in the concept of social welfare" de 1950. Arrow recibió el premio Nobel de Economía en 1972.

Mírelas fijamente. ¿Lo hizo ya? Bien, si no quedó mareado con tanto n y k en diferentes posturas, le sugerimos que se cerciore de que en general el rango al que apunta el lema 5.3.3 está muy alejado (por arriba) del de la cota binómica. Como ejemplo, para $k = 2$, tenemos

$$\frac{2^n}{4} \leq S(n,2) \leq \frac{2^n}{2} \qquad \text{mientras que} \qquad \frac{n^2}{4} \leq \binom{n}{2} \leq \frac{n^2}{2}.$$

En cualquier caso, de la misma manera que en el caso binómico, las cotas del lema 5.3.3 no son especialmente precisas, como entenderá el lector si sigue los argumentos de la:

Demostración del lema 5.3.3. La cota $k!S(n,k) \leq k^n$ es inmediata, sin más que comparar aplicaciones sobreyectivas con las totales (lema 5.3.1).

La cota inferior se prueba por inducción en n (por ejemplo, para k fijo) aplicando que

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k\,S(n-1,k) > k\,S(n-1,k).$$

Dejamos los detalles para el lector. ■

Por analogía con los coeficientes binómicos, nos gustaría disponer también de una estimación del tamaño del mayor de los $S(n,k)$ para n fijo. Pero ahora, primero, no está claro dónde se ubica ese valor máximo (siga leyendo un poco), y segundo, no parece claro de dónde sacar esa estimación, pues ahora no contamos con una fórmula manejable como en el caso binómico.[81]

Así que pasamos a analizar la unimodalidad de la sucesión $(S(n,k))_k$ para n fijo, que probaremos a partir de la condición más fuerte de logconcavidad (recuérdese el lema 5.1.5).

Lema 5.3.4 *Para n fijo, la sucesión $(S(n,k))_{k=1}^n$ es logcóncava:*

$$S(n,k)^2 \geq S(n,k-1)\cdot S(n,k+1) \qquad \textit{para todo } k = 2,\dots,n-1,$$

y por tanto unimodal.

Demostración. La prueba se construye por inducción en n. Pero el argumento, como veremos, requiere usar toda la información disponible de manera astuta. Dejamos al lector la comprobación de los primeros casos, y suponemos directamente que, para un cierto n fijo,

$$(\star) \quad S(n,k)^2 \geq S(n,k-1)\cdot S(n,k+1) \quad \text{para todo } k.$$

También será cierto, claro, que $S(n,k-1)^2 \geq S(n,k-2)\cdot S(n,k)$, y multiplicando estas dos desigualdades, descubrimos que

$$(\star\star) \quad S(n,k-1)\,S(n,k) \geq S(n,k-2)\cdot S(n,k+1) \quad \text{para todo } k.$$

[81] Para el lector interesado, el *máximo* de los $S(n,k)$ en cada fila cumple que

$$\ln(\max_k S(n,k)) = n\ln(n) - n\ln(\ln(n)) - n + O\big(n\ln(\ln(n))/\ln(n)\big).$$

En el transcurso del argumento que sigue emplearemos estas dos desigualdades, junto con la recurrencia de los números de Stirling.

Vamos, sin más dilación, con el caso $n+1$:

$$\begin{aligned} S(n{+}1,k{-}1)\,S(n{+}1,k{+}1) &= \big[S(n,k{-}2)+(k{-}1)S(n,k{-}1)\big]\,\big[S(n,k)+(k{+}1)S(n,k{+}1)\big] \\ &= \underbrace{S(n,k{-}2)\,S(n,k)}_{\leq S(n,k-1)^2,\ \text{por } (\star)} + (k{+}1)\ \underbrace{S(n,k{-}2)\,S(n,k{+}1)}_{\leq S(n,k-1)S(n,k),\ \text{por } (\star\star)} \\ &\quad + (k{-}1)\,S(n,k{-}1)\,S(n,k) + (k^2{-}1)\ \underbrace{S(n,k{-}1)\,S(n,k{+}1)}_{\leq S(n,k)^2,\ \text{por } (\star)}. \end{aligned}$$

Sustituyendo un incómodo factor (k^2-1) por el más conveniente k^2, llegamos a que

$$S(n{+}1,k{-}1)\,S(n{+}1,k{+}1) \leq S(n,k{-}1)^2 + k^2\,S(n,k)^2 + 2k\,S(n,k{-}1)\,S(n,k)\,,$$

que mágicamente tiene una estructura de cuadrado, lo que nos permite concluir que

$$S(n{+}1,k{-}1)\,S(n{+}1,k{+}1) \leq [S(n,k{-}1) + k\,S(n,k)]^2 = S(n{+}1,k)^2\,,$$

usando una vez más la regla de recurrencia. Párese a respirar, querido lector, recréese en la sutileza del argumento y dé por finalizada la prueba. ■

De la demostración se deduce, en realidad, que la sucesión $S(n,k)$ es estrictamente logcóncava. Así que, para n fijo, la sucesión $S(n,k)$ vale 1 en $k=1$ y en $k=n$, y entre medias tiene el aspecto unimodal de la figura de un par de páginas atrás, con un máximo (o como mucho dos consecutivos). Curiosamente, salvo el caso trivial $n=2$, no se conoce ningún valor de n para el que haya en realidad dos máximos; se trata de un "problema abierto", en la jerga matemática.[82]

E. Los números de Bell y un tal Dobińksi

Los números de Bell $B(n)$, que cuentan el número de particiones de un conjunto con n elementos en bloques no vacíos (sin atender al número de bloques que conforman la partición), y también los $\widetilde{B}(n)$, sus equivalentes para el caso de particiones ordenadas, tienen, como ya se ha visto, importancia por sí mismos, y dan respuesta a un buen número de cuestiones combinatorias. Éstos son sus primeros valores:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
$B(n)$	1	2	5	15	52	203	877	4140	21 147	115 975	$\cdots$
$\widetilde{B}(n)$	1	3	13	75	541	4683	47 293	545 835	7 087 261	102 247 563	$\cdots$

Las respectivas fórmulas, en términos de números de Stirling, son, para $n \geq 1$,

$$(\star)\quad B(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k) \qquad \text{y} \qquad (\star\star)\quad \widetilde{B}(n) = \sum_{k=1}^{n} k!\,S(n,k).$$

[82]Lo que sí se sabe es dónde sitúa, aproximadamente, ese máximo (o máximos) de la sucesión: si llamamos k_n^* al valor en el que $S(n,k)$ alcanza el máximo, resulta que $k_n^* \sim n/\ln(n)$, cuando $n \to \infty$. Es decir, "bastante" a la izquierda del punto medio $n/2$.

Las fórmulas anteriores exigen tener precalculado el triángulo de los números de Stirling $S(n,k)$. Un análisis alternativo, que no involucra a los $S(n,k)$, pasa por comprobar que los $B(n)$ y los $\widetilde{B}(n)$ verifican las siguientes reglas de recurrencia: para cada $n \geq 1$,

$$(\dagger) \quad B(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B(k) \qquad \text{y} \qquad (\ddagger) \quad \widetilde{B}(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \widetilde{B}(k),$$

donde, por convenio y comodidad, definimos $B(0) = \widetilde{B}(0) = 1$.

Para demostrar la primera regla de recurrencia, clasificamos las particiones de $\{1,\dots,n\}$ en función del bloque que contenga a un elemento determinado, por ejemplo el 1: llamamos k al número de elementos que acompañan al 1 en su bloque. El parámetro k de la clasificación va entre 0 y $n-1$. Las particiones de $\{1,\dots,n\}$ con k elementos acompañando al 1 en su bloque se construyen eligiendo primero los k acompañantes (de entre los $n-1$ posibles), para luego partir en cierto número de bloques los $n-k-1$ elementos restantes. Esto da, tras la pertinente aplicación de la regla de la suma y del producto,

$$B(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B(n-k-1),$$

que coincide con $(\dagger)$ sin más que revertir (de abajo a arriba) el índice de sumación. El argumento para $(\ddagger)$ es idéntico, salvo que aquí podemos argumentar directamente sobre, por ejemplo, el primer bloque, sin necesidad de señalar un elemento en particular, lo que da ese coeficiente binómico con un n arriba. Observe, lector, que las recurrencias son extremadamente parecidas, salvo que en un caso hay un coeficiente binómico $\binom{n-1}{k}$, y en el otro $\binom{n}{k}$. Repare, sin embargo, mirando la lista de valores de $B(n)$ y $\widetilde{B}(n)$, en el inmenso impacto (en cuanto a tamaño) que tiene esta ligera diferencia.

Hablando de tamaños, estaría bien disponer de una estimación, aunque sea de andar por casa, sobre cuán rápido es el crecimiento de estas dos sucesiones de números.

Lema 5.3.5 *Para cada $n \geq 1$, $B(n) \leq \widetilde{B}(n) \leq n^n$.*

Esta cota es muy poco precisa, incluso para valores pequeños de n, como puede comprobar el lector leyendo por ejemplo los valores de $B(10)$ y $\widetilde{B}(10)$ en la tabla de la página anterior y comparándolos con 10^{10}.

En cuanto a cotas inferiores, tenemos por ejemplo que $n! \leq \widetilde{B}(n)$; recuerde el lector la discusión sobre rankings con o sin empates permitidos del ejemplo 5.3.3. Al final de este apartado E obtendremos alguna cota inferior adicional.

Pero obtener cotas precisas, o quizás estimaciones asintóticas, para $B(n)$ o $\widetilde{B}(n)$ es asunto más delicado, y que en todo caso requiere tecnología de la que no disponemos en este momento. Remitimos al lector interesado al capítulo 14 y nos ponemos con la:

Demostración del lema 5.3.5. Que $B(n) \leq \widetilde{B}(n)$ es evidente a partir de sus respectivas definiciones. De manera que sólo hay que demostrar que $\widetilde{B}(n) \leq n^n$.

Podemos probar esta cota por inducción (total) y aprovechando la regla de recurrencia (‡). Supongamos que $\widetilde{B}(k) \leq k^k$ para cada $k \leq n-1$. Acotamos entonces

$$\begin{aligned}\widetilde{B}(n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \widetilde{B}(k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n-k} \binom{n-1}{k} \widetilde{B}(k) \leq n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \widetilde{B}(k) \leq n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} k^k \\ &\leq n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (n-1)^k = n\, n^{n-1} = n^n,\end{aligned}$$

usando en la segunda desigualdad la hipótesis de inducción, y en el penúltimo paso, el teorema del binomio.

Una demostración alternativa y directa: el lema 5.3.2, para $x = n$, nos da que

$$n^n = \sum_{j=1}^{n} n(n-1)\cdots(n-j+1)\, S(n,j) = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} j!\, S(n,j) \geq \sum_{j=1}^{n} j!\, S(n,j) = \widetilde{B}(n).$$

Por último, un argumento de corte combinatorio: tome, lector, una partición de $\{1,\dots,n\}$, digamos que con k bloques ordenados $(B_1,\dots,B_k)$. Construya ahora una aplicación f de $\{1,\dots,n\}$ en $\{1,\dots,n\}$ con la regla siguiente: si $j \in \{1,\dots,n\}$ está en el bloque B_l, entonces $f(j) = l$. Compruebe el lector que cada partición tiene asociada una aplicación distinta con esta regla, pero que este procedimiento no genera todas las n^n aplicaciones posibles. ■

¿Podría acaso existir una *fórmula* para $B(n)$, o quizás para $\widetilde{B}(n)$? Parece complicado obtenerlas, dado que no disponemos de fórmulas manejables para los números $S(n,k)$. Y sin embargo… En 1877, un tal[83] G. Dobiński publicó un artículo[84] en el que se entretenía calculando los primeros valores de la siguiente función, definida a través de una serie:

$$\textsc{dob}(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n}{k!} \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

una función que bautizamos ya como $\textsc{dob}(n)$ en su honor. Hay un primer caso, el $n = 0$, algo especial y en el que se apoyan los restantes cálculos:

$$\textsc{dob}(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Aquí la suma empieza realmente en $k = 0$, y el valor de esta serie es el número e. Dobiński

[83] Con todo el cariño.

[84] Con el título "Summierung der Reihe $\sum n^m/n!$ für $m = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$", es decir, un simple y elocuente "La suma de la serie $\sum n^m/n!$ para $m = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$". Del tal Dobiński se sabe bien poco.

escribió los primeros casos,

$$\begin{aligned}
\textsc{dob}(0) &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots \\
\textsc{dob}(1) &= \phantom{1 +{}} \frac{1}{1!} + \frac{2}{2!} + \frac{3}{3!} + \frac{4}{4!} + \cdots \\
\textsc{dob}(2) &= \phantom{1 +{}} \frac{1^2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{3^2}{3!} + \frac{4^2}{4!} + \cdots \\
\textsc{dob}(3) &= \phantom{1 +{}} \frac{1^3}{1!} + \frac{2^3}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{4^3}{4!} + \cdots,
\end{aligned}$$

y observó que si se suman los dos primeros se obtiene

$$\textsc{dob}(0) + \textsc{dob}(1) = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{3}{2!} + \frac{4}{3!} + \cdots = \frac{1^2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{3^2}{3!} + \frac{4^2}{4!} + \cdots$$

que no es sino $\textsc{dob}(2)$; o que combinando los tres primeros,

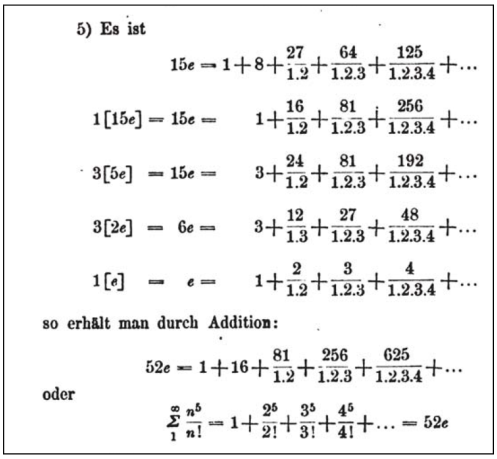
$$\textsc{dob}(0) + 2\textsc{dob}(1) + \textsc{dob}(2) = 1 + \frac{4}{1!} + \frac{9}{2!} + \frac{27}{3!} + \cdots = \frac{1^3}{1!} + \frac{2^3}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{4^3}{4!} + \cdots$$

que es $\textsc{dob}(3)$; o que con los cuatro primeros,

$$\textsc{dob}(0) + 3\textsc{dob}(1) + 3\textsc{dob}(2) + \textsc{dob}(3) = 1 + \frac{8}{1!} + \frac{27}{2!} + \frac{64}{3!} + \cdots = \frac{1^4}{1!} + \frac{2^4}{2!} + \frac{3^4}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \cdots$$

obtenemos el valor de $\textsc{dob}(4)$.

Así, combinando hábilmente los sucesivos cálculos, pudo deducir, sucesivamente, y partiendo de que $\textsc{dob}(0) = e$, que $\textsc{dob}(1) = e$, $\textsc{dob}(2) = 2e$, $\textsc{dob}(3) = 5e$, $\textsc{dob}(4) = 15e$, $\textsc{dob}(5) = 52e$, etc. Un "etc." que en el caso de Dobiński se acabó con el caso $\textsc{dob}(8) = 4140e$, en el que, suponemos que ya agotado por tanto cálculo, dio por finalizada su contribución. A la derecha mostramos un recorte de sus cuentas para el caso $\textsc{dob}(5)$. La generalización de su argumento, que describiremos a continuación, ha terminado por ser conocida como la "fórmula de Dobiński", que como veremos es una manera rápida de expresar y calcular los números de Bell.


5) Es ist

$$15e = 1+8+\frac{27}{1.2}+\frac{64}{1.2.3}+\frac{125}{1.2.3.4}+\ldots$$

$$\begin{aligned}
1[15e] = 15e &= 1+\frac{16}{1.2}+\frac{81}{1.2.3}+\frac{256}{1.2.3.4}+\ldots \\
3[5e] = 15e &= 3+\frac{24}{1.2}+\frac{81}{1.2.3}+\frac{192}{1.2.3.4}+\ldots \\
3[2e] = 6e &= 3+\frac{12}{1.3}+\frac{27}{1.2.3}+\frac{48}{1.2.3.4}+\ldots \\
1[e] = e &= 1+\frac{2}{1.2}+\frac{3}{1.2.3}+\frac{4}{1.2.3.4}+\ldots
\end{aligned}$$

so erhält man durch Addition:

$$52e = 1+16+\frac{81}{1.2}+\frac{256}{1.2.3}+\frac{625}{1.2.3.4}+\ldots$$

oder

$$\sum_1^\infty \frac{n^5}{n!} = 1+\frac{2^5}{2!}+\frac{3^5}{3!}+\frac{4^5}{4!}+\ldots = 52e$$

Dobiński estaba exhibiendo los primeros casos de la regla de recurrencia que satisfacen los números $\textsc{dob}(n)$:

$$\textsc{dob}(n) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \textsc{dob}(j) \quad \text{para cada } n \geq 1.$$

Por si algún lector no había detectado ya la relación, a la vista de los primeros valores exhibidos arriba, se trata exactamente de la misma recurrencia que verifican los números $B(n)$.

En la comprobación usaremos, además de que $\text{DOB}(0) = e$, la siguiente versión del teorema del binomio:

$$(k+1)^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} k^j.$$

Y además intercambiaremos alegremente un par de órdenes de sumación. Animamos al lector concienzudo a que compruebe que tales manejos están justificados. Separamos siempre el primer caso, que es especial:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \text{DOB}(j) = e + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j} \text{DOB}(j) &= e + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^j}{k!} \\
= e + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j} k^j}_{=(k+1)^{n-1}-1} &= e - \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}}_{=e-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^{n-1}}{k!} \\
= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^{n-1}}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^n}{(k+1)!} &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^n}{j!} = \text{DOB}(n).
\end{aligned}$$

El lector que se haya entretenido jugando con los primeros casos "a la Dobiński" habrá usado el truco del penúltimo paso, ese factor $(k+1)$ que se añade arriba y abajo, en sus argumentos.

Como las sucesiones $B(n)$ y $\text{DOB}(n)$ verifican la misma regla de recurrencia, sus valores deben coincidir, salvo por el pequeño detalle de que no arrancan en el mismo valor, sino que $B(0) = 1$ y $\text{DOB}(0) = e$. Esto nos dice que $eB(n) = \text{DOB}(n)$ y nos lleva, finalmente, a la famosa (y sorprendente) **fórmula de Dobiński**:

$$\boxed{B(n) = \frac{1}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n}{k!}} \qquad \text{para cada } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Obsérvese, por un lado, que esta *fórmula* para $B(n)$ se ha obtenido sin atender a argumentos combinatorios de ninguna clase sobre particiones de conjuntos; y por otra, que involucra el cálculo de una serie. Pero se trata de una serie que converge muy rápidamente (por la presencia del $k!$ en el numerador), como puede comprobarse numéricamente (o quizás revisando el ejercicio 5.3.3). Por ejemplo, $B(8) = 4\,140$, mientras que la suma de los primeros 12 términos de la serie ya nos da un valor de aproximadamente $4\,139.945$. Vaya, con el tal Dobiński...

Podemos obtener la fórmula de Dobiński con un razonamiento alternativo y más directo[85]. Fijamos $n \geq 1$. Para cada $k \geq 1$, reescribimos la identidad del lema 5.3.2 de la siguiente manera:

$$k^n = \sum_{j=1}^{k} S(n,j)\, \frac{k!}{(k-j)!}, \qquad \text{de donde} \qquad \frac{k^n}{k!} = \sum_{j=1}^{k} S(n,j)\, \frac{1}{(k-j)!}.$$

[85]¡Eh!, pero ciento y pico años después.

Sumando en todos los valores de k e intercambiando órdenes de sumación,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^n}{k!} &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k} S(n,j)\,\frac{1}{(k-j)!} = \sum_{k=1}^{\infty} S(n,j)\sum_{j=k}^{\infty}\frac{1}{(k-j)!}\\ &= \sum_{j=1}^{\infty} S(n,j)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!} = e\sum_{j=1}^{\infty} S(n,j) = e\,B(n),\end{aligned}$$

como queríamos comprobar. Casi el mismo argumento nos permite obtener una expresión más general:

Lema 5.3.6 (Fórmula de Dobiński) *Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y todo $n \geq 1$,*

$$\sum_{j=1}^{n} S(n,j)\,\lambda^j = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^n}{k!}\,\lambda^k.$$

En particular, para $\lambda = 1$ se obtiene la fórmula original de Dobiński:

$$B(n) = \frac{1}{e}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^n}{k!} \qquad \text{para cada } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Demostración. Procedemos como antes, pero ahora incluyendo un factor λ^k extra:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^n}{k!}\,\lambda^k &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k} S(n,j)\,\frac{1}{(k-j)!}\,\lambda^k = \sum_{k=1}^{\infty} S(n,j)\,\lambda^j\sum_{j=k}^{\infty}\frac{\lambda^{k-j}}{(k-j)!}\\ &= \sum_{j=1}^{\infty} S(n,j)\,\lambda^j\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!} = e^{\lambda}\sum_{j=1}^{\infty} S(n,j)\,\lambda^j\,,\end{aligned}$$

que es lo que queríamos comprobar. Obsérvese cuán útil ha resultado escribir λ^k como $\lambda^{k-j}\cdot\lambda^j$ en uno de los pasos intermedios. ∎

Volveremos a encontrarnos esta fórmula más adelante, ya con el lenguaje de las funciones generatrices (capítulo 13), y también en contextos probabilísticos (capítulo 17).

El lector, punzante, inquisitivo, se estará preguntando si existirá una fórmula “a la Dobiński” para los números de Bell ordenados $\widetilde{B}(n)$. La hay, sí. Es la siguiente:

Lema 5.3.7 *Para cada $n \geq 1$,*

$$\widetilde{B}(n) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^n}{2^k}.$$

Recuérdese que definimos $\widetilde{B}(0) = 1$. La serie anterior es convergente (para cada n); pero no converge tan vertiginosamente como la de los $B(n)$, pues en el denominador hay un 2^k, de crecimiento modesto en comparación con $k!$. Como ejemplo numérico, $\widetilde{B}(8) = 545\,835$, y hay que sumar unos 45 términos de la serie para obtener un resultado que, redondeado al entero superior, sea ese número. Compárese con lo que ocurría con $B(8)$.

Para demostrar esta identidad (con las herramientas de que disponemos por el momento), tenemos, como en los Bell usuales, dos alternativas: comprobar que la función de n que aparece a la derecha cumple la misma regla de recurrencia que los $\widetilde{B}(n)$, que unas páginas atrás etiquetábamos con (‡), o bien usar la fórmula ($\star\star$) en el lema 5.3.2 y andar habilidoso con manipulaciones de sumas y series. Vamos a dar ahora la primera demostración, y dejamos la segunda como ejercicio 5.3.4 (con las oportunas sugerencias) para el lector.

Demostración del lema 5.3.7. Llamemos, para cada $n \geq 1$,

$$A(n) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^n}{2^j}\,;$$

ponemos $A(0) = 1$. Tenemos que comprobar que la sucesión $A(n)$ verifica la regla de recurrencia

$$A(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} A(k) \qquad \text{para cada } n \geq 1,$$

análoga a los $\widetilde{B}(n)$, lo que nos dará que ambas sucesiones son la misma, pues $A(0) = \widetilde{B}(0)$. El caso $n = 1$ es evidente. Escribimos, para $n \geq 2$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} A(k) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} A(k) = 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^k}{2^j} = 1 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} j^k$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}\Big(-1 - j^n + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} j^k\Big) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1+j)^n}{2^{j+1}} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j+1}} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^n}{2^{j+1}}.$$

Obsérvese cómo hemos separado, juiciosamente, el caso $k = 0$, y luego hemos intercambiado el orden de sumación y hemos aplicado el teorema del binomio, añadiendo dos términos que faltaban. Queda sólo identificar las series que aparecen. Por un lado,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1+j)^n}{2^{j+1}} \overset{[m=j+1]}{=} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{m^n}{2^m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^n}{2^m} - \frac{1}{2} = 2A(n) - \frac{1}{2}\,;$$

y por otro,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^n}{2^{j+1}} = A(n) \qquad \text{y} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j+1}} = \frac{1}{2},$$

(en la segunda hemos usado la fórmula de la serie geométrica), lo que da el resultado. ■

Para finalizar esta discusión, observe el lector cómo a partir de estas fórmulas a la Dobiński se obtienen de manera directa cotas inferiores para $B(n)$ y $\widetilde{B}(n)$:

$$B(n) = \frac{1}{e}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n}{k!} \implies B(n) \geq \frac{1}{e}\,\frac{n^n}{n!} \qquad \text{y} \qquad \widetilde{B}(n) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n}{2^k} \implies \widetilde{B}(n) \geq \frac{n^n}{2^{n+1}},$$

sin más que quedarse únicamente[86] con el sumando $k = n$ en ambas series. Y que la cota de la derecha mejora la trivial $\widetilde{B}(n) \geq n!$ en cuanto que n sea mayor o igual que 9.

[86] Pues si éste es el argumento, no serán muy buenas las cotas, dirá el lector. Concedido.

F. Multiparticiones (ordenadas)

Recuerde, lector, que una partición del conjunto $\{1, \dots, n\}$ en k bloques no vacíos es lo mismo que distribuir n bolas numeradas en k cajas idénticas sin que queden cajas vacías: hay $S(n, k)$ de ellas. Y que las particiones *ordenadas*, de las que hay $k!S(n, k)$, trata la misma cuestión, pero con cajas numeradas.

Digamos ahora que tenemos m_1 objetos idénticos entre sí (por ejemplo, bolas blancas), m_2 objetos también indistinguibles entre sí, pero distintos de los anteriores (por ejemplo, bolas azules), y así hasta m_r bolas, digamos, moradas. El objetivo es contar de cuántas maneras se pueden distribuir estas bolas en k cajas numeradas *sin dejar cajas vacías.*

Denotamos por

$$\widehat{S}(m_1, \dots, m_r; k)$$

al número de estas distribuciones. Los datos son los números $m_1, \dots, m_r$, enteros mayores o iguales que 1, y también el parámetro $k \geq 1$ que indica el número de cajas disponibles. Para comparaciones posteriores, llamaremos n a la suma $m_1 + \dots + m_r$. Añadimos como convenio, combinatoriamente razonable y algebraicamente conveniente, que $\widehat{S}(m_1, \dots, m_r; 0) = 0$.

En el caso particular en el que todos los m_i son 1 (y hay n de ellos para que la suma valga n), entonces hay un solo objeto de cada tipo (es decir, son n bolas numeradas), y tenemos particiones (ordenadas) del conjunto $\{1, \dots, n\}$ en k bloques no vacíos; de manera que

$$\widehat{S}\,(\overbrace{1, \dots, 1}^{n}; k) = k!\,S(n, k)$$

En el caso en el que $r = 1$, hay un único tipo de objeto, y n copias de él (bolas indistinguibles, en la jerga), situación que se corresponde con composiciones, recuérdese el apartado 5.1.3; así que

$$\widehat{S}(n; k) = \binom{n-1}{k-1}.$$

De manera que estos números $\widehat{S}(m_1, \dots, m_r; k)$ incluyen, como casos particulares, el recuento de las distribuciones de n bolas (tanto numeradas como idénticas) en k cajas numeradas, sin cajas vacías.

Para obtener una fórmula para $\widehat{S}(m_1, \dots, m_r; k)$, apelaremos a la técnica de inversión binómica que vimos en el apartado 5.1.7.

Observe, lector, que sabemos que hay $\binom{m_1-1}{k-1}$ maneras de distribuir las m_1 bolas blancas en las k cajas sin dejar cajas vacías, y también que hay $\binom{m_2-1}{k-1}$ maneras de ubicar las azules sin dejar cajas vacías, y... Pero estos datos no resultan de interés para el cálculo de $\widehat{S}(m_1, \dots, m_r; k)$, porque las cajas han de quedar llenas tras repartir *todas* las bolas, y no únicamente las bolas blancas, o las azules, o...

Obviemos, por un momento, la condición de que no queden cajas vacías[87] y denotemos por $a(m_1, \dots, m_r; k)$ al número total de distribuciones. El panorama se aclara bastante, pues, ahora sí, basta contar de cuántas maneras se pueden distribuir las m_1 bolas blancas permitiendo cajas vacías: $\binom{m_1+k-1}{k-1} = \binom{m_1+k-1}{m_1}$ maneras (apartado 5.1.3 de nuevo), y luego

[87] ¡Hombre!, justo la que complica el asunto.

multiplicar éstas por todas las distribuciones de las bolas azules, y luego... Esto nos da que, para $k \geq 1$,

$$(\star) \qquad a(m_1, \dots, m_r; k) = \prod_{l=1}^{r} \binom{m_l + k - 1}{m_l}.$$

Han resuelto otro problema, apuntará el lector con criterio. Sí. Pero si ahora contabilizamos $a(m_1, \dots, m_r; k)$ atendiendo al número de cajas que realmente se ocupan, obtenemos

$$(\star\star) \qquad a(m_1, \dots, m_r; k) = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} \widehat{S}(m_1, \dots, m_r; j) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \widehat{S}(m_1, \dots, m_r; j),$$

sin más que elegir primero qué cajas se llenan, y luego repartir las bolas en ellas (a la derecha hemos usado que $\widehat{S}(m_1, \dots, m_r; j) = 0$).

Así que disponemos de la fórmula $(\star)$ para los $a(m_1, \dots, m_r; k)$, y de la identidad $(\star\star)$ que los pone en relación con nuestro objetivo, los $\widehat{S}(m_1, \dots, m_r; k)$; identidad que, como el lector atento ya habrá advertido, se presta a aplicar inversión binómica, en la versión del corolario 5.1.26, para obtener que

$$\widehat{S}(m_1, \dots, m_r; k) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j}\, a(m_1, \dots, m_r; j).$$

Utilizando ahora la identidad $(\star)$, tenemos finalmente que

$$\boxed{\widehat{S}(m_1, \dots, m_r; k) = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \prod_{l=1}^{r} \binom{m_l + j - 1}{m_l}}$$

Una expresión imponente que, por ejemplo tomando $m_1 = \cdots = m_r = 1$ nos da, como debe ser, que la fórmula para los números de Stirling que vimos unas páginas atrás:

$$k!\, S(n, r) = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j}\, j^r,$$

Denotemos, finalmente, por $\widehat{B}(m_1, \dots, m_r)$ (notación con innegable sabor a números de Bell ordenados) al número de distribuciones de esas $(m_1, \dots, m_r)$ colecciones de objetos en cajas numeradas, sin dejar cajas vacías, pero sin fijar cuántas cajas se usan. Cuando todos los m_i son iguales a 1 (y hay n de ellos), tenemos que $\widehat{B}(1 \dots, 1) = \widetilde{B}(n)$, el n-esimo número de Bell ordenado, mientras que $\widehat{B}(n) = 2^{n-1}$, el número total de composiciones de n.

La (imponente) fórmula explícita[88] para $\widehat{B}(m_1, \dots, m_r)$ es

$$\boxed{\widehat{B}(m_1, \dots, m_r) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \prod_{l=1}^{r} \binom{m_l + j - 1}{m_l}}$$

pues simplemente hay que sumar la expresión de arriba en cada valor posible de k, el número de cajas que se ocupan. Véase también el ejercicio 5.3.15.

[88] Debida al militar y matemático británico Percy Alexander MacMahon (1854–1929). MacMahon, especialista en combinatoria y teoría de números, escribió un par de textos de referencia sobre combinatoria.

5.3.2. Descomposición de permutaciones en ciclos

Una permutación se puede escribir, de manera única, como producto de ciclos disjuntos dos a dos. Esto se vio en la sección 5.2.1. La unicidad aquí debe entenderse con las salvedades habituales: el orden en el que presentamos los ciclos, y el elemento que aparece primero dentro de cada ciclo.

En principio, el número de ciclos que puede tener una permutación es cualquier número entre 1 (las permutaciones cíclicas) y n (la permutación identidad). La pregunta que surge de manera natural es: ¿cuántas permutaciones tienen un número determinado de ciclos? Observe, lector, que el lema 5.2.2 de Cauchy no da respuesta a esta cuestión, pues no prescribimos la estructura de ciclos, sino sólo el número total de ciclos.

Como es habitual, comenzamos nombrando[89] y acuñando símbolo:

$$z(n,k) = \#\{\text{permutaciones de } \{1,\dots,n\} \text{ que tienen exactamente } k \text{ ciclos (disjuntos)}\}\,.$$

A los $z(n,k)$ nos referiremos como números de Stirling (sin signo) de primera especie. Los **números de Stirling de primera especie** $s(n,k)$ son versiones *con signo* de estos $z(n,k)$. La relación concreta es

$$(-1)^{n-k}\, s(n,k) = z(n,k)\,,$$

de manera que los $s(n,k)$ toman valores positivos y negativos. Nótese que $z(n,k) = |s(n,k)|$. En lo que sigue argumentaremos combinatoriamente con los $z(n,k)$, pero registraremos también las propiedades que se obtengan en el lado de los $s(n,k)$.

Para empezar, vamos a restringir nuestro análisis al caso de interés en el que $n \geq 1$ y $1 \leq k \leq n$, puesto que, como no puede haber permutaciones con más ciclos que elementos, tendremos que

$$s(n,k) = 0 \quad \text{si } k > n.$$

Esto permite registrar los $s(n,k)$ en un triángulo a la Tartaglia.

Como en sus hermanos de segunda especie, conviene considerar también el caso $k = 0$, e incluso $n = 0$, conviniendo en que $s(n,0) = 0$ si $n \geq 1$ pero $s(0,0) = 1$. O de manera más compacta, $s(n,0) = \delta_{n,0}$.

En cuanto a los valores frontera, obsérvese que, si $k = n$, la única permutación que tiene tantos ciclos como elementos es la identidad. Por tanto, para cada $n \geq 1$,

$$z(n,n) = 1 \quad \Longrightarrow \quad s(n,n) = (-1)^{n-n} \times 1 = 1.$$

En el otro extremo, cuando $k = 1$, como discutimos en las inmediaciones del lema 5.2.2, hay $(n-1)!$ permutaciones de $\{1,\dots,n\}$ que son, ellas mismas, un ciclo (las llamadas permutaciones cíclicas). Así que, para cada $n \geq 1$,

$$z(n,1) = (n-1)! \quad \Longrightarrow \quad s(n,1) = (-1)^{n-1}\,(n-1)!\,.$$

Nos animamos a un par de cálculos más.

[89] Y puso nombres a toda bestia y ave de los cielos y a todo animal del campo. . .

EJEMPLO 5.3.4 *Los casos $k = n - 1$ y $k = 2$.*

El número $z(n, n-1)$ cuenta el número de permutaciones de $\{1, \dots, n\}$ con exactamente $n-1$ ciclos. Es decir, ha de haber un ciclo de orden dos (una trasposición), y el resto han de ser ciclos de orden 1. Para el recuento basta elegir qué dos elementos forman la transposición, lo que nos dice que

$$z(n, 2) = \binom{n}{2} \qquad \text{y por tanto} \qquad s(n, n-1) = -\binom{n}{2}.$$

Para el caso $k = 2$, vamos a argumentar, por comodidad notacional, con el número de permutaciones de $\{1, 2, \dots, n+1\}$ con exactamente dos ciclos, que hemos dado en nombrar como $z(n+1, 2)$. En estas permutaciones, uno de los dos ciclos contendrá al 1; llamemos a éste el *primer* ciclo. La escritura de una tal permutación será

$$\circlearrowleft_{n+1}(1, \dots) \circ \circlearrowleft_{n+1}(\dots)$$

Recuerde, lector: el orden de presentación de ciclos es irrelevante, pero para nuestro argumento sorteamos esta indiferencia señalando como primer ciclo el que contiene al 1. Además, en ese primer ciclo escribimos el 1 en la primera posición, como es habitual.

Clasificamos ahora estas permutaciones en función del número k de elementos del segundo ciclo, donde $k = 1, \dots, n$. Para k fijo,

- elegimos primero los k elementos de entre $\{2, \dots, n+1\}$ para el segundo ciclo (hay $\binom{n}{k}$ maneras de hacerlo);
- para luego ubicarlos en el ciclo; esto se puede hacer de $(k-1)!$ maneras, como ya sabemos, porque el primer elemento aquí no es relevante;
- finalmente, ubicamos los restantes $n-k$ elementos en el primer ciclo; note, lector, que esto supone ordenarlos *detrás* del 1. Así que hay $(n-k)!$ maneras distintas de realizar este último paso (y no $(n-k-1)!$ como se obtendría si no hubiéramos fijado ya ese primer elemento).

Aplicando la regla del producto, luego la de la suma, y alguna simplificación, deducimos que

$$z(n+1, 2) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (k-1)!\,(n-k)! = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k} = n! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = n!\,H_n,$$

donde H_n designa al n-ésimo número armónico (ejemplo 3.3.1). Para el correspondiente número de Stirling de primera especie tenemos que, para cada $n \geq 2$,

$$s(n, 2) = (-1)^n\,(n-1)!\,H_{n-1},$$

una fórmula inesperada, y de naturaleza bien distinta, por ejemplo, a la de $s(n, n-1)$. ♣

A. Recurrencia y cálculo de los $s(n,k)$

Nos centramos ahora en la búsqueda de una regla de recurrencia. Argumentamos, como en el caso de sus hermanos stirlingianos[90], clasificando en función del papel de un elemento especial, digamos el último, n. Es decir, construiremos las descomposiciones del conjunto $\mathcal{X} = \{1, \dots, n\}$ en k ciclos a partir de las de $\{1, \dots, n-1\}$. Hay dos casos excluyentes:

Caso 1. Si n forma un ciclo por sí mismo, entonces, al quitarlo, nos queda una permutación de $\{1, \dots, n-1\}$ con exactamente $k-1$ ciclos.

Caso 2. En caso contrario, n comparte ciclo con otros elementos. Quitar n y pasar a permutaciones de $\{1, \dots, n-1\}$ no cambia el número de ciclos. Pero, como el siguiente ejemplo en el que quitamos el elemento 4 muestra, no podemos emplear, tal cual, esta idea:

$$\circlearrowleft_4(3,\,2) \circ \circlearrowleft_4(1,\,4) \;\to\; \circlearrowleft_3(3,\,2) \circ \circlearrowleft_3(1) \qquad \circlearrowleft_4(3,\,2,\,4) \circ \circlearrowleft_4(1) \;\to\; \circlearrowleft_3(3,\,2) \circ \circlearrowleft_3(1)$$

Sin embargo, partiendo de la permutación de $\{1,2,3\}$ dada por $\circlearrowleft_3(3,\,2) \circ \circlearrowleft_3(1)$, obtenemos tres permutaciones de $\{1,2,3,4\}$ en las que el 4 está acompañado en su ciclo:

$$\circlearrowleft_3(3,\,2) \circ \circlearrowleft_3(1) \quad \longrightarrow \quad \circlearrowleft_4(4,\,3,\,2) \circ \circlearrowleft_4(1), \quad \circlearrowleft_4(3,\,4,\,2) \circ \circlearrowleft_4(1) \quad \text{y} \quad \circlearrowleft_4(3,\,2) \circ \circlearrowleft_4(1,\,4).$$

Argumentamos entonces en sentido contrario. Partimos de una permutación del conjunto $\{1, \dots, n-1\}$ con k ciclos, que tendrá un aspecto semejante a

$$\circlearrowleft_{n-1}(a_1^1, \dots, a_s^1) \circ \circlearrowleft_{n-1}(a_1^2, \dots, a_t^2) \circ \cdots \circ \circlearrowleft_{n-1}(a_1^k, \dots, a_u^k)\,.$$

Queremos añadir el elemento n sin que se formen nuevos ciclos. Sea cual sea la permutación considerada, tenemos $n-1$ lugares donde colocarlo (los $n-1$ "huecos" entre los a_j). Así que, por cada permutación de $\{1, \dots, n-1\}$ con k ciclos, obtenemos $n-1$ permutaciones de $\{1, \dots, n\}$ con k ciclos en las que n esté "acompañada".

Deducimos entonces que el número de permutaciones de $\mathcal{X}$ con k ciclos coincide con

$$(n-1)\,\#\big\{\text{perms. de } \{1, \dots, n-1\} \text{ con } k \text{ ciclos}\big\} + \#\big\{\text{perms de } \{1, \dots, n-1\} \text{ con } k-1 \text{ ciclos}\big\}\,,$$

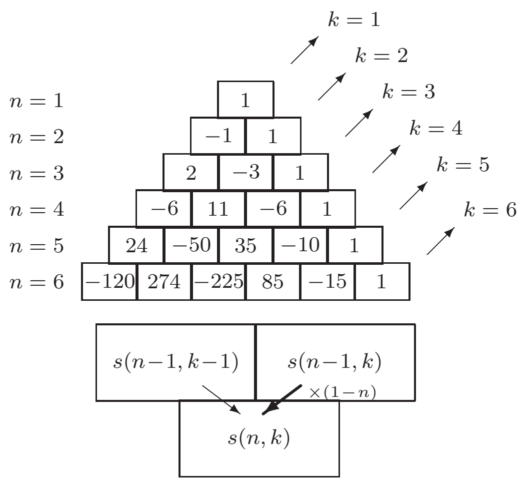
lo que nos daría la relación de recurrencia

$$\boxed{z(n,k) = z(n-1,k-1) + (n-1)\,z(n-1,k)}$$

O, tras decodificar signos, en la siguiente recurrencia para los números de Stirling de primera especie:

$$\boxed{s(n,k) = s(n-1,k-1) - (n-1)\,s(n-1,k)}$$

Con esta regla y los valores frontera, podemos rellenar los valores del triángulo de los $s(n,k)$. Los valores de $z(n,k)$ se leen, simplemente, quitando el signo en los valores del triángulo.



[90] Alienígenas de más allá de Orión.

Estos primeros casos, por cierto, parecen sugerir que los números $z(n,k)$, para n fijo, forman una sucesión unimodal (y quizás logcóncava), como los coeficientes binómicos y los otros números de Stirling. Y así es, pero para comprobarlo usaremos una técnica general que veremos más adelante (apartado 7.2.4.)

B. Stirling y sus números

Las familias de números $S(n,k)$ y $s(n,k)$ no tenían, cuando aparecieron en el ecosistema matemático, el sabor combinatorio que aquí les estamos dando. Stirling[91] estaba interesado en asuntos de corte algebraico, que por su interés pasamos a esbozar, dejando para los ejercicios algunos detalles de su desarrollo. Antes de que el lector se aventure en la lectura de este apartado, le advertimos de que requiere cierta familiaridad con nociones de álgebra lineal.

Stirling andaba batallando con la siguiente cuestión. Consideramos el espacio vectorial de los polinomios $p(x)$ con coeficientes reales. Podría ser el espacio $\mathbb{R}_n[x]$ de los polinomios con grado $\leq n$, de dimensión finita; o incluso el espacio $\mathbb{R}[x]$ de *todos* los polinomios, de dimensión infinita, pero numerable.

La base más habitual de este último espacio es la *base estándar*,

$$\mathcal{B}_{\mathrm{e}} = \big\{x^k\big\}_{k=0}^{\infty} = \{1, x, x^2, x^3, \dots\},$$

que usamos en la definición usual de polinomio como combinación lineal de los monomios x^k. Otro par de bases especialmente relevantes son la base de los *factoriales decrecientes*,

$$\mathcal{B}_{\downarrow} = \big\{x(x-1)\cdots(x-k+1)\big\}_{k=0}^{\infty} = \{1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2), \dots\}$$

formada por los polinomios de la forma $x(x-1)\cdots(x-k+1)$, más la interpretación especial del caso $k=0$, y la base de los *factoriales crecientes*,

$$\mathcal{B}_{\uparrow} = \big\{x(x+1)\cdots(x+k-1)\big\}_{k=0}^{\infty} = \{1, x, x(x+1), x(x+1)(x+2), \dots\}.$$

En la definición 5.1.32 acuñamos notaciones para estos polinomios: $x^{k\downarrow} = x(x-1)\cdots(x-k+1)$ y $x^{k\uparrow} = x(x+1)\cdots(x+k-1)$ para $k \geq 1$, junto con el convenio $x^{0\downarrow} = x^{0\downarrow} = 1$.

Stirling estaba interesado en hallar la relación entre la base estándar y la de los factoriales decrecientes. Compruebe el lector que los sucesivos monomios x^k se pueden escribir, en la base de factoriales decrecientes, como sigue:

$$\begin{aligned}
1 &= 1\\
x &= x\\
x^2 &= x + x(x-1)\\
x^3 &= x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2)\\
x^4 &= x + 7x(x-1) + 6x(x-1)(x-2) + x(x-1)(x-2)(x-3)\\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

1	0	0	0	0	$\cdots$
0	1	0	0	0	$\cdots$
0	1	1	0	0	$\cdots$
0	1	3	1	0	$\cdots$
0	1	7	6	1	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

La tabla de la derecha, que recoge los coeficientes de estas identidades, es justamente las de los números de Stirling $S(n,k)$, con el convenio adicional de que $S(n,0) = \delta_{n,0}$ para cada $n \geq 0$.

[91] La atribución a Stirling de estas familias de números se debe al matemático danés Nielsen, allá por 1906.

En sentido inverso, se obtienen las siguientes identidades, cuyos coeficientes recogemos en la tabla de la derecha:

$$\begin{aligned}
1 &= 1 \\
x &= x \\
x(x-1) &= -x + x^2 \\
x(x-1)(x-2) &= 2x - 3x^2 + x^3 \\
x(x-1)(x-2)(x-3) &= -6x + 11x^2 - 6x^3 + x^4 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

1	0	0	0	0	$\cdots$
0	1	0	0	0	$\cdots$
0	-1	1	0	0	$\cdots$
0	2	-3	1	0	$\cdots$
0	-6	11	-6	1	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

que son justamente los números de Stirling $s(n,k)$, con el convenio ya mencionado de que $s(n,0) = \delta_{n,0}$ para cada $n \geq 0$. Sí, la versión con signo, como no podía ser de otra manera, pues los miembros izquierdos de las identidades anteriores son sumas alternadas.[92]

Los dos diccionarios se resumen en las siguientes identidades, que por su importancia registramos como:

Lema 5.3.8 *Para cada $n \geq 0$,*

$$(\dagger) \qquad x^n = \sum_{j=0}^{n} S(n,j)\, x(x-1)\cdots(x-j+1)\,;$$

$$(\ddagger) \qquad x(x-1)\cdots(x-n+1) = \sum_{j=0}^{n} s(n,j)\, x^j,$$

Para el caso $n = 0$ se aplican las convenciones citadas antes.

Demostración. La identidad ($\dagger$) se vio ya en el lema 5.3.2.

En cuanto a la identidad ($\ddagger$), que involucra números de Stirling de primera especie, puede el lector probarla por inducción, usando la regla de recurrencia de los $s(n,k)$: ejercicio 5.3.7.

Mostramos ahora una demostración alternativa, de corte combinatorio. Fijamos $n \geq 1$. Con el argumento que sigue probaremos la identidad

$$(\star) \qquad x(x+1)\cdots(x+n-1) = \sum_{j=1}^{n} z(n,j)\, x^j,$$

que es equivalente a ($\ddagger$) sin más que cambiar x por $-x$. Compruébelo, amable lector. Buen momento, tras escribir ($\star$), para incluir las dos siguientes tablas, las originales de Stirling, de su *Methodus Differentialis* de 1730, en las que aparecen, a la izquierda, los números $S(n,k)$ (gire, lector, la cabeza 90 grados hacia su izquierda), y la derecha, la tabla de los $z(n,k)$, es decir, los $s(n,k)$ sin signo[93]:

[92]Por cierto, lector: pasar de los factoriales decrecientes a los monomios es sencillo, ¿verdad?, basta multiplicar y luego ir agrupando sumandos por grado común; ¿y el camino inverso? ¿Se le ocurre algún método para hacerlo organizadamente?

[93]¿Pero no nos habían dicho que a Stirling le interesaban las versiones con signo, relacionadas con la base de los factoriales decrecientes? A ver si estaba mirando la de los factoriales crecientes. . .

1	1	1	1	1	1	1	1	1	&c.
	1	3	7	15	31	63	127	255	&c.
		1	6	25	90	301	966	3025	&c.
			1	10	65	350	1701	7770	&c.
				1	15	140	1050	6951	&c.
					1	21	266	2646	&c.
						1	28	461	&c.
							1	36	&c.
								1	&c.
									&c.

1									
1	1								
2	3	1							
6	11	6	1						
24	50	35	10	1					
120	274	225	85	15	1				
720	1764	1624	735	175	21	1			
5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1		
40320	109584	105056	67284	22449	4536	546	36	1	
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

Obsérvese que el caso $x = 1$ de $(\star)$ nos dice que

$$\sum_{j=1}^{n} z(n,j) = n!,$$

como debe ser (total de permutaciones a la derecha, clasificadas por el número de ciclos a la izquierda). Por cierto, el caso $x = 1$ de la expresión $(\ddagger)$ nos da que, si $n \geq 2$,

$$\sum_{j=1}^{n} s(n,j) = 0,$$

de forma que, sumados por filas, los números de Stirling de segunda especie dan 0 (para $n \geq 2$). Note, lector, la analogía con la suma de coeficientes binómicos alternados en signo.

Empezaremos probando $(\star)$ para el caso de $x = k$, entero positivo. Luego, como en el lema 5.3.2, usaremos un argumento sobre unicidad de polinomios para completar la demostración.

Planteamos la siguiente cuestión. Tenemos el conjunto $\{1,\dots,n\}$ y k colores. Dada una permutación de $\{1,\dots,n\}$, coloreamos sus elementos según el ciclo del que forman parte: todos los elementos de un ciclo reciben un (mismo) color de los k disponibles. Se pueden pintar ciclos distintos con el mismo color. ¿Cuántas de estas permutaciones coloreadas (por ciclos) habrá?

Obsérvese que si una permutación tiene j ciclos, entonces se puede colorear de k^j formas distintas. De manera que el número de permutaciones coloreadas será, aplicando la regla de la suma y la definición de los $z(n,j)$,

$$\sum_{j=1}^{n} z(n,j)\, k^j .$$

Contamos ahora estas permutaciones de otra manera. Coloreamos primero el 1: hay k posibilidades. Para cada una de éstas, para el 2 caben dos opciones: o bien va detrás del 1 en su ciclo (y por tanto coloreado con el color que lleve el 1), o bien arranca un nuevo ciclo, que puede ir de k colores distintos. En total, $k+1$ posibilidades. En el siguiente paso, para cada elección para el 1 y el 2 de los pasos anteriores, el 3 puede ir, o bien detrás del 1 (en su ciclo y con el mismo color), o bien detrás del 2 (en su ciclo, que quizás sea también el del 1, y con su color), o bien arrancando un nuevo ciclo, que puede llevar k colores distintos. En total, $k+2$ posibilidades. Y así sucesivamente, de manera que el número de permutaciones coloreadas es $k(k+1)\cdots(k+n-1)$.

La prueba concluye, como en el lema 5.3.2, observando que los dos polinomios de grado n que aparecen en ($\star$) han de ser el mismo, pues coinciden en todos los números naturales.

Reconocerá, querido lector, que esta demostración le ha dejado flipando en colores. ■

Las identidades (†) y (‡) del lema 5.3.8 permiten cambiar las coordenadas de un polinomio de una base a la otra: la primera, en la que intervienen los $S(n,k)$, cambia de la base estándar $\mathcal{B}_{\mathrm{e}}$ a la base $\mathcal{B}_{\downarrow}$ de los factoriales decrecientes, mientras que la segunda, la de los $s(n,k)$, hace el cambio inverso.

Lo ilustramos con un ejemplo: partimos del polinomio

$$(*) \qquad p(x) = 1 + 2x + 3x^3,$$

cuyos coeficientes en la base $\mathcal{B}_{\mathrm{e}}$ son, por supuesto, $(1,2,0,3,0,0,\dots)_{\mathrm{e}}$.

Cambiamos de base a mano: sustituimos cada monomio x^k por la correspondiente combinación de factoriales decrecientes que se exhibió un par de páginas más atrás, agrupamos términos, simplificamos y nos queda

$$(**) \qquad p(x) = 1 + 5x + 9x(x-1) + 3x(x-1)(x-2)\,,$$

que nos dice que los coeficientes de $p(x)$ en la base $\mathcal{B}_{\downarrow}$ son $(1,5,9,3,0,0,\dots)_{\downarrow}$.

En sentido contrario, si el polinomio estuviera escrito como en ($**$), bastaría desarrollar cada término para obtener ($*$).

Mecanizamos el procedimiento usando matrices de cambio de base (vea el lector los detalles en el ejercicio 5.3.8). El producto (matricial) del vector de coeficientes en la base $\mathcal{B}_{\mathrm{e}}$ por la matriz de la página anterior que contiene los coeficientes $S(n,k)$,

$$(1,2,0,3,0,0,\dots)_{\mathrm{e}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 7 & 6 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = (1,5,9,3,0,0,\dots)_{\downarrow}$$

da los coeficientes del polinomio $p(x)$ en la base $\mathcal{B}_{\downarrow}$. Y al revés, multiplicando los coeficientes del polinomio $p(x)$ en $\mathcal{B}_{\downarrow}$ por la matriz con los $s(n,k)$,

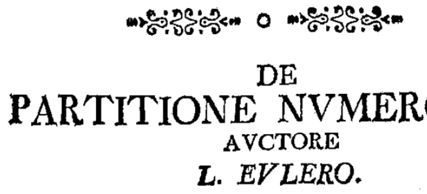
$$(1,5,9,3,0,0,\dots)_{\downarrow} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & -6 & 11 & -6 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = (1,2,0,3,0,0,\dots)_{\mathrm{e}},$$

recuperamos los coeficientes en la base $\mathcal{B}_{\mathrm{e}}$.

5.3.3. De partitione numerorum

Nos interesa ahora contar de cuántas maneras se puede escribir un cierto entero $n \geq 1$ como *suma* de enteros positivos, donde el orden de los sumandos es *irrelevante*. Cada una de estas formas será lo que llamaremos una **partición del entero** n; y cada uno de los sumandos, una **parte**.

Al estudio de estas particiones está dedicado este apartado, y también una buena parte de los capítulos 13 y 14, donde las revisitaremos con la ayuda de las funciones generatrices. Pero lector, si tiene oportunidad, no deje de consultar la fuente original: a Euler, nada menos, que analizó la cuestión en las apenas 30 páginas en su *De partitione numerorum*, el capítulo 16 de su *Introductio in analysin infinitorum* de 1748. No, no bromeamos: corra a buscarlo.[94]


DE
PARTITIONE NVMERORVM.
AVCTORE
L. EVLERO.

En el esquema de la derecha exhibimos las siete posibles particiones del entero 5. Obsérvese que, por ejemplo, $5 = 2 + 3$ y $5 = 3 + 2$ representan la misma partición. Por comodidad, y para evitar repeticiones indeseadas en los recuentos, es habitual escribir los sumandos de menor a mayor; por ejemplo,

$$11 = 2 + 2 + 2 + 2 + 3.$$

$$\begin{array}{lcl} 5 & = & 1+1+1+1+1 \\ 5 & = & 1+1+1+2 \\ 5 & = & 1+2+2 \\ 5 & = & 1+1+3 \\ 5 & = & 2+3 \\ 5 & = & 1+4 \\ 5 & = & 5 \end{array}$$

Usaremos la notación $p(n)$ para referirnos al número total de particiones de n. Intervendrán también en nuestros análisis las particiones de n con *exactamente* $k \geq 1$ partes; el número de ellas lo denotaremos por $p_k(n)$. Obsérvese que $p_k(n) = 0$ si $k > n$, así que podremos disponer estos números en un triángulo, como las familias combinatorias vistas hasta el momento. El valor de $p(n)$ se obtiene, claro, sumando los $p_k(n)$ de una fila de ese triángulo:

$$p(n) = \sum_{k=1}^{n} p_k(n)$$

La lista de particiones del 5 que vimos antes nos dice que $p_1(5) = 1$, $p_2(5) = 2$, $p_3(5) = 2$, $p_4(5) = 1$ y $p_5(5) = 1$, lo que da un total da $p(5) = 7$ particiones del entero 5.

Interesará también tratar particiones que verifiquen algunas propiedades especiales, que no sean necesariamente la de tener un número dado de partes; para estos casos no introduciremos notaciones específicas y las nombraremos simplemente como

$$p(n \mid \text{la partición cumple cierta propiedad})$$

Por ejemplo, la versión extendida del símbolo $p_k(n)$ sería

$$p_k(n) = p(n \mid \text{el número de partes es exactamente } k).$$

[94] A su biblioteca, por ejemplo: hay una espléndida edición publicada por la RSME y la Sociedad Thales en 2003, a cargo de Javier Pérez y Antonio Durán, que incluye una edición facsímil del original, junto con una versión traducida y comentada.

El lector atento habrá advertido la semejanza entre las particiones de n y lo que en la sección 5.1.3 dimos en llamar *composiciones* de n. En ambos casos se trata de escribir n como suma de enteros positivos, aunque en las composiciones el orden de presentación de los sumandos es relevante, mientras que en las particiones no lo es. Una diferencia crucial. Como ilustración, véase el ejemplo de la derecha, en el que se relacionan las cinco particiones y las ocho composiciones del 4. Observe, lector, cómo en este ejemplo particular las composiciones se agrupan para dar particiones de manera un tanto arbitraria, que parece depender de la partición en sí. Así que, aunque sabemos contar composiciones, no está claro cómo podríamos obtener a partir de ahí información sobre el recuento de particiones. Vea el lector, sin embargo, el apartado B de esta misma sección.

$$
\begin{array}{rcl}
\text{Particiones de 4} & & \text{Composiciones de 4} \\
1+1+1+1 & \longleftrightarrow & 1+1+1+1 \\
1+1+2 & \longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{c} 1+1+2 \\ 1+2+1 \\ 2+1+1 \end{array}\right\} \\
2+2 & \longleftrightarrow & 2+2 \\
1+3 & \longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{c} 1+3 \\ 3+1 \end{array}\right\} \\
4 & \longleftrightarrow & 4
\end{array}
$$

Como tendremos ocasión de comprobar en el capítulo 13, las funciones generatrices son un lenguaje natural para contar particiones de enteros. Aquí vamos a usar argumentos combinatorios en los que aparecerán los llamados **diagramas de Ferrers**[95], una manera muy útil y visual de representar, analizar y manipular particiones de un entero n. Se trata, simplemente, de dibujar tantas filas como sumandos tenga la partición, y en cada fila colocar tantos símbolos (digamos $\times$) como nos diga el tamaño del sumando en cuestión (los dibujaremos en orden decreciente de tamaños). A la derecha mostramos los diagramas de Ferrers de dos particiones del 9.

$$
\begin{array}{rcl}
9=1+3+5 & \longrightarrow & \begin{array}{l} \times\times\times\times\times \\ \times\times\times \\ \times \end{array} \\
9=1+2+3+3 & \longrightarrow & \begin{array}{l} \times\times\times \\ \times\times\times \\ \times\times \\ \times \end{array}
\end{array}
$$

A. Valores frontera y recurrencia para $p_k(n)$

Para el cálculo de los valores de $p_k(n)$ (y después los de $p(n)$), siguiendo la estrategia ya habitual, obtendremos una regla recursiva que, junto a unos "valores frontera", permite completar el triángulo correspondiente.

Los valores frontera se obtienen con un argumento directo: por un lado, $p_1(n) = 1$ para cada $n \geq 1$, pues sólo hay una manera de partir n en un sumando. Y $p_n(n) = 1$, pues sólo hay una forma de escribir n como suma de n sumandos (todo unos).

En cuanto a la recurrencia, tenemos:

Teorema 5.3.9 (recurrencia para $p_k(n)$) *Dado $n \geq 1$ y un entero k entre 1 y n,*

$$p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k).$$

[95] En honor del matemático británico Norman Macleod Ferrers (1829-1903), quien parece ser que fue el primero en utilizarlos para el análisis de las particiones de un entero. Uno se puede imaginar a Ferrers trabajando en la cafetería de la esquina, pintando diagramas, para luego alardear de sus conocimientos matemáticos ante los colegas quienes, un momento después, se dan la vuelta y se ponen a dibujar crucecitas al tuntún. Por cierto, hay quien llama a estas figuras *diagramas de Young*, aunque en este caso se suelen usar cuadraditos, en lugar de aspas, para representar la partición. No parece que el simple cambio del símbolo usado merezca el cambio de nombre, pero existen diversas generalizaciones (llamadas *tableros de Young*) que tienen su importancia en otros contextos. En todo caso, aquí permaneceremos fieles al bueno de Ferrers.

DEMOSTRACIÓN. Clasificamos las particiones de n con exactamente k partes en función de si tienen o no un sumando 1. Si el 1 es un sumando de la partición, entonces al quitarlo nos queda una partición de $n-1$ con exactamente $k-1$ partes. Y viceversa: dada una partición de $n-1$ con exactamente $k-1$ partes, le añadimos el sumando 1 para obtener una partición de n con exactamente k partes, una de las cuales es 1.

En caso contrario, si todas las partes son ≥ 2, entonces podemos eliminar toda la primera columna del diagrama de Ferrers y quedarnos con una partición de $n-k$ con exactamente k partes (y viceversa). Los siguientes diagramas representan visualmente los dos argumentos.

$$k \text{ filas} \left\{ \begin{array}{llll} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \\ \times & \times & \times & \\ \times & \times & & \\ \times & & & \end{array} \right. \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{llll} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \\ \times & \times & \times & \\ \times & \times & & \end{array} \qquad k \text{ filas} \left\{ \begin{array}{llll} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \\ \times & \times & \times & \\ \times & \times & & \\ \times & \times & & \end{array} \right. \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{lll} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \\ \times & \times & \\ \times & & \\ \times & & \end{array}$$

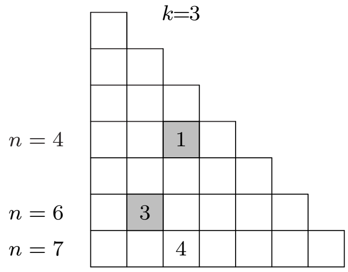
Consulte también el lector también el ejercicio 5.3.12. ■

Los valores frontera y la recurrencia del teorema 5.3.9 permiten calcular el tablero[96] de los $p_k(n)$ y, sumando por filas, obtener los valores de $p(n)$:

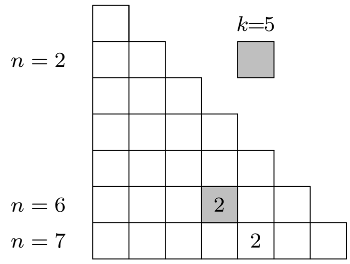
	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	k=7	k=8	k=9	k=10	k=11	k=12	k=13	k=14	k=15	k=16	k=17	
n=1	1																	$p(1)$=1
n=2	1	1																$p(2)$=2
n=3	1	1	1															$p(3)$=3
n=4	1	2	1	1														$p(4)$=5
n=5	1	2	2	1	1													$p(5)$=7
n=6	1	3	3	2	1	1												$p(6)$=11
n=7	1	3	4	3	2	1	1											$p(7)$=15
n=8	1	4	5	5	3	2	1	1										$p(8)$=22
n=9	1	4	7	6	5	3	2	1	1									$p(9)$=30
n=10	1	5	8	9	7	5	3	2	1	1								$p(10)$=42
n=11	1	5	10	11	10	7	5	3	2	1	1							$p(11)$=56
n=12	1	6	12	15	13	11	7	5	3	2	1	1						$p(12)$=77
n=13	1	6	14	18	18	14	11	7	5	3	2	1	1					$p(13)$=101
n=14	1	7	16	23	23	20	15	11	7	5	3	2	1	1				$p(14)$=135
n=15	1	7	19	27	30	26	21	15	11	7	5	2	1	3	1			$p(15)$=176
n=16	1	8	21	34	37	35	28	22	15	11	7	3	2	5	1	1		$p(16)$=231
n=17	1	8	24	39	47	44	38	29	22	15	11	5	3	7	2	1	1	$p(17)$=297

[96] Vaya, y el gusto por los triángulos, ¿dónde quedó?

Como en los coeficientes binómicos o los números de Stirling, el cálculo de cada $p_k(n)$ requiere únicamente dos valores previamente calculados, aunque, ¡atención!, uno de ellos está bastante “lejos” (k filas más arriba) de la celda que estemos calculando. A veces tanto, que se sale del tablero. Véanse, en las dos figuras que siguen, los cálculos para $p_3(7)$ y $p_5(7)$.



$p_3(7) = p_2(6) + p_3(4)$



$p_5(7) = p_4(6) + p_5(2)$

La tabla de las particiones de la página anterior contiene mucha estructura. Una mirada por filas (n fijo) desvela, o al menos parece sugerir, que la sucesión $(p_k(n))_k$ sigue el ya habitual comportamiento unimodal, con uno o dos máximos intermedios.[97] En la figura hemos resaltado la fila $n = 13$. Mirando en “diagonales” (líneas paralelas al borde derecho), se observa que la sucesión se estabiliza en un cierto valor (véase el caso $p_{n-6}(n)$ en la figura). Por último, en columnas (es decir, para k fijo), la sucesión parece ser creciente, como sugiere el caso $p_3(n)$ marcado en la figura. Los ejercicios 5.3.9 y 5.3.11 permitirán al lector reflexionar al respecto.

B. Estimaciones de tamaño para $p_k(n)$, con k fijo

La recurrencia del teorema 5.3.9 es un procedimiento eficaz para calcular los valores de $p_k(n)$ (y por ende, los de $p(n)$), pero no proporciona, en principio, información sobre la magnitud de un $p_k(n)$ dado. En este apartado estudiaremos el comportamiento asintótico de $p_k(n)$ cuando $n \to \infty$ y, atención, *k está fijo.* Sobre el tablero de valores de la página anterior, nos preguntamos por cómo crece la lista de números de la columna k.

Argumentamos comparando particiones con composiciones, como intentamos hacer (sin mucho éxito) un par de páginas atrás con las particiones de $n = 4$. Fijamos n y k. Sabemos (apartado 5.1.3) que hay $\binom{n-1}{k-1}$ composiciones de n con k sumandos. Observe, lector, que

- $p_k(n) \le \binom{n-1}{k-1}$, pues hay menos particiones de n con k partes que composiciones de n con k partes, por aquello del orden;
- y que, dada una partición de n en k partes, podemos permutar de $k!$ maneras sus sumandos para obtener composiciones, aunque claramente no serán todas iguales. Por ejemplo, la partición $5 = 1 + 2 + 2$, que tiene tres sumandos, daría lugar, en principio, a $3! = 6$ posibles ordenaciones de los sumandos de las que, en realidad, sólo hay tres composiciones distintas, $1 + 2 + 2$, $2 + 1 + 2$ y $2 + 2 + 1$. En todo caso, permutando particiones obtenemos todas las composiciones, así que $k!\, p_k(n) \ge \binom{n-1}{k-1}$.

[97] Sí, lector: la sucesión $p_k(n)$, con n fijo, es logcóncava. No lo probaremos aquí.

De manera que

$$(\dagger) \qquad \frac{1}{k!}\binom{n-1}{k-1} \le p_k(n) \le \binom{n-1}{k-1}.$$

Para k fijo, se tiene que

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{(k-1)!} \sim \frac{n^{k-1}}{(k-1)!} \qquad \text{cuando } n \to \infty,$$

pues el límite de la división de $(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$ entre n^{k-1} es 1. Pero la desigualdad ($\dagger$) no nos da una estimación asintótica para $p_k(n)$, justo por el factor $k!$ en uno de los lados.

Para afinar más, volvemos a la comparación entre composiciones y particiones permutadas para observar que si las k partes de la partición de n *fueran distintas*, entonces sí que tendríamos $k!$ composiciones asociadas. Subjuntivo bien usado, dirá el lector, porque no todas las particiones tienen partes distintas. Pues vamos a forzar a que las partes sean distintas, le contestamos, separándolos si fuere menester, aunque –añadimos– entonces tendremos que comparar con composiciones, ya no de n, sino de un número mayor. Vamos con los detalles.

Una partición de n con exactamente k partes es lo mismo que una solución de

$$(\star) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n \\ 1 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_k. \end{cases}$$

Escribimos ordenados (por ejemplo de menor a mayor) los k términos para evitar, justamente, escribir la misma partición varias veces. Sí, lector, son soluciones de ecuaciones diofánticas, sobre las que tanto discutimos en la sección 5.1.3, pero repare en el detalle de que las restricciones sobre las variables que aquí incluimos no son como las que en su momento analizamos ($x_j \ge a_j$, para unos números a_j *fijos*). Pero no se desmoralice, y siga adelante con nosotros. Si hacemos el cambio de variables

$$\widetilde{x}_i = x_i + (i-1)\,, \qquad \text{para cada } 1 \le i \le k\,,$$

los números $\widetilde{x}_i$ mantienen el mismo orden que tenían los x_i, pero son ahora todos distintos. Tras este truco de separación, estos nuevos números suman

$$\sum_{i=1}^{k} \widetilde{x}_i = \sum_{i=1}^{k} (x_i + i - 1) = \sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=1}^{k} (i-1) = n + \sum_{j=0}^{k-1} j = n + \frac{k(k-1)}{2}\,.$$

Así que $p_k(n)$, el número de soluciones del problema ($\star$), es también el número de soluciones de

$$(\star\star) \qquad \begin{cases} \widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2 + \cdots + \widetilde{x}_k = n + k(k-1)/2 \\ 1 \le \widetilde{x}_1 < \widetilde{x}_2 < \cdots < \widetilde{x}_k \end{cases}$$

Por ejemplo, del entero 6 hay tantas particiones con tres sumandos como soluciones tenga

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 1 \le x_1 \le x_2 \le x_3 \end{cases}$$

Debajo de estas líneas, a la izquierda, mostramos tres de estas particiones. A su derecha escribimos su traducción en términos de las $\widetilde{x}_i$ (al valor de x_3 hay que sumarle 2, al de x_2 le sumamos 1 y dejamos x_1 tal cual está):

$$\begin{array}{ccccccc} & x_1 & & x_2 & & x_3 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 6= & 1 & + & 1 & + & 4 \\ 6= & 1 & + & 2 & + & 3 \\ 6= & 2 & + & 2 & + & 2 \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{ccccccc} & \widetilde{x}_1 & & \widetilde{x}_2 & & \widetilde{x}_3 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 9= & 1 & + & 2 & + & 6 \\ 9= & 1 & + & 3 & + & 5 \\ 9= & 2 & + & 3 & + & 4 \end{array}$$

Ahora comparamos soluciones de $(\star\star)$ con composiciones de $n+k(k-1)/2$ con tamaño k. Como los $\widetilde{x}_i$ son todos *distintos*, cada permutación de una lista $(\widetilde{x}_i, \dots, \widetilde{x}_k)$ solución de $(\star\star)$ genera una composición distinta de $n+k(k-1)/2$ con tamaño k. En el ejemplo, la partición de 9 dada por $1+2+6$ da lugar a las $3! = 6$ composiciones de 9 siguientes:

$$1+2+6\,, \quad 1+6+2\,, \quad 2+1+6\,, \quad 2+6+1\,, \quad 6+1+2\,, \quad 6+2+1\,.$$

Dirá el lector, y con razón, que no obtenemos así todas las composiciones de $n+k(k-1)/2$ con tamaño k. Cierto. Como ejemplo, la composición de 9 dada por $3+3+3$ no se puede obtener de esta manera. La conclusión es que

$$k!\,p_k(n) \le \binom{n+\frac{k(k-1)}{2}-1}{k-1} \implies p_k(n) \le \frac{1}{k!}\binom{n+\frac{k(k-1)}{2}-1}{k-1},$$

(nótese el $\le$), lo que nos dice, usando una de las desigualdades de (†), que, para todo $n \ge 1$ y para cada $1 \le k \le n$,

$$\frac{1}{k!}\binom{n-1}{k-1} \le p_k(n) \le \frac{1}{k!}\binom{n+\frac{k(k-1)}{2}-1}{k-1}.$$

De esta desigualdad, ahora sí, se puede deducir que:

Lema 5.3.10 *Para k fijo,*

$$p_k(n) \sim \frac{n^{k-1}}{k!\,(k-1)!} \qquad \textit{cuando } n \to \infty.$$

Consulte el lector concienzudo el ejercicio 5.1.3 para los detalles.

C. Otros tipos particulares de particiones

Una cuestión de interés en el análisis de particiones consiste en estudiar, y contar, si resulta posible, las particiones que cumplen determinadas propiedades. Ya hemos analizado en detalle el caso de las particiones con un número k dado de partes. Pero podrían interesarnos, por ejemplo, las particiones cuyo mayor sumando es k, o aquellas que tienen todos sus sumandos distintos, o quizás las que tengan un número impar de sumandos, o quizás... Como ya hemos venido advirtiendo en varias ocasiones, es habitual (y conveniente) estudiar este tipo de cuestiones con la tecnología de las funciones generatrices.

Aquí, y ahora, vamos a analizar dos casos particulares, aunque bien relevantes, usando únicamente argumentos pictórico-combinatorios (esto es, diagramas de Ferrers). Estas dos cuestiones son, por un lado, las particiones en las que prescribimos el tamaño del mayor sumando, y por otro las particiones cuyas partes son todas distintas. Recuerde, lector, que estas últimas han aparecido en la discusión sobre el tamaño de $p_k(n)$ del apartado anterior.

C1. Número de partes y tamaño de la mayor parte. Para la primera cuestión, observamos que si en el diagrama de Ferrers de una partición de n intercambiamos filas por columnas, seguimos teniendo una partición de n, pues no alteramos el número de símbolos; y que con esta transformación se intercambian los papeles del número de partes y el tamaño de la parte mayor.

Veamos, por ejemplo, la partición de 18 dada por $18 = 1+2+3+3+4+5$, que tiene seis partes y cuya parte mayor es un 5. Si ahora intercambiamos filas por columnas, obtenemos una partición de 18 con cinco partes y cuya parte mayor es 6. En concreto, la partición $18 = 1+2+4+5+6$.

$$
\begin{array}{lllll}
\times & \times & \times & \times & \times \\
\times & \times & \times & \times & \\
\times & \times & \times & & \\
\times & \times & \times & & \\
\times & \times & & & \\
\times & & & &
\end{array}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{array}{llllll}
\times & \times & \times & \times & \times & \times \\
\times & \times & \times & \times & \times & \\
\times & \times & \times & \times & & \\
\times & \times & & & & \\
\times & & & & &
\end{array}
$$

Dada una partición λ, diremos que λ' es su **conjugada** si se obtiene de λ intercambiando filas por columnas. Las particiones λ y λ' (como ocurría en el ejemplo de la partición de 18). De hecho, la transformación $\lambda \to \lambda'$ es una biyección entre las particiones de n con k partes y las particiones de n cuyo mayor sumando es k, resultado que recogemos en el siguiente:

Teorema 5.3.11 *Dados enteros $n \geq 1$ y $1 \leq k \leq n$,*

$$p(n \,|\, \textit{su mayor parte es } k) = p_k(n)\,.$$

Vea el lector también el ejercicio 5.3.12. Si además quiere indagar la posibilidad de que una partición conjugada coincida con la de partida, consulte el ejercicio 5.3.13.

C2. Particiones con todos los sumandos distintos. Analizamos a continuación las particiones de n cuyas partes son todas distintas, una cuestión que ya interesó a Euler y que tiene insospechadas conexiones. Llamamos, para cada $1 \leq k \leq n$,

$$q_k(n) = p(n \,|\, \text{con } k \text{ partes, todas distintas})$$

y añadimos el contador de particiones con partes distintas:

$$q(n) = p(n \,|\, \text{con partes distintas}) = \sum_{k=1}^{n} q_k(n).$$

Introducimos también la siguiente notación:

$$q_{\text{par}}(n) = p(n \,|\, \text{con un número par de partes, todas distintas})\,;$$
$$q_{\text{impar}}(n) = p(n \,|\, \text{con un número impar de partes, todas distintas})\,.$$

Obsérvese que

$$q(n) = \sum_{k=1}^{n} q_k(n) = \sum_{k\,\text{par}} q_k(n) + \sum_{k\,\text{impar}} q_k(n) = q_{\text{par}}(n) + q_{\text{impar}}(n).$$

El estudio de los $q_k(n)$ es directo: exactamente el mismo argumento que utilizamos en la discusión sobre el tamaño de $p_k(n)$, aquel con el que separábamos los sumandos de una partición para que fueran distintos, nos da que

$$q_k(n) = p_k\big(n - \tbinom{k}{2}\big),$$

de manera que podemos obtener los valores de los $q_k(n)$ a partir del tablero de las particiones habituales; y una vez obtenidos éstos, sumando en k, se deducen los valores de la función $q(n)$ que cuenta las particiones de n con sumandos distintos. La siguiente tabla recoge estas cantidades para los primeros valores de n:

n	particiones con sumandos distintos	$q(n)$	$q_1(n)$	$q_2(n)$	$q_3(n)$	$\cdots$	$q_{\text{par}}(n)$	$q_{\text{impar}}(n)$
1	1	1	1	0	0	$\cdots$	0	1
2	2	1	1	0	0	$\cdots$	0	1
3	3 , 1+ 2	2	1	1	0	$\cdots$	1	1
4	4 , 1+ 3	2	1	1	0	$\cdots$	1	1
5	5 , 1+ 4 , 2+ 3	3	1	2	0	$\cdots$	2	1
6	6 , 1+ 5 , 2+ 4 , 1+ 2+ 3	4	1	2	1	$\cdots$	2	2
7	7 , 1+ 6 , 2+ 5 , 3+ 4 , 1+ 2+ 4	5	1	3	1	$\cdots$	3	2
8	8 , 1+ 7 , 2+ 6 , 3+ 5 , 1+ 2+ 5 , 1+ 3+ 4	6	1	3	2	$\cdots$	3	3

A la derecha hemos incluido dos columnas que recogen los primeros valores de las funciones $q_{\text{par}}(n)$ y $q_{\text{impar}}(n)$, que, recordemos, suman $q(n)$. Observe, lector, cómo aproximadamente la "mitad" de estas particiones con sumandos distintos tienen un número par de partes, y la otra mitad un número impar. Con más precisión, estos primeros casos sugieren que $q_{\text{par}}(n)$ y $q_{\text{impar}}(n)$, o bien coinciden, o bien difieren en una unidad. Por ejemplo, $q_{\text{par}}(n)$ está una unidad por debajo para 1 y 2 (y 12, 15, etc., si el lector tuviera la paciencia de analizar estos casos), mientras que está una unidad por encima para 5 y 7 (y también 22 y 26, etc.). Esto es un patrón general. El siguiente resultado precisa para qué valores de n hay coincidencia, y para cuáles una cantidad lleva ventaja sobre la otra.

Teorema 5.3.12

$$q_{\text{par}}(n) - q_{\text{impar}}(n) = \begin{cases} (-1)^m, & \textit{si } n = \frac{m}{2}(3m \pm 1) \quad \textit{para cierto entero } m, \\ 0, & \textit{en el resto de los casos.} \end{cases}$$

Antes de dar la demostración de este teorema, y para insistir en el asombro que produce su enunciado, listamos los primeros valores de los números $m(3m \pm 1)/2$ que allí aparecen:

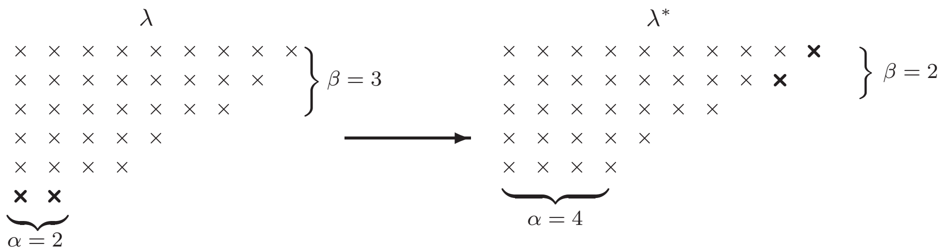
	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$	$m=7$	$\cdots$
$m\,(3m-1)/2$	1	5	12	22	35	51	70	$\cdots$
$m\,(3m+1)/2$	2	7	15	26	40	57	77	$\cdots$

Los números de la primera fila son los llamados *números pentagonales*, viejos conocidos del lector que, disciplinadamente, se haya tomado la molestia de consultar el ejercicio 1.2.3.

Demostración. Asociamos a cada partición λ de n con todas sus partes distintas dos cantidades, $\alpha(\lambda), \beta(\lambda) \geq 1$. Por un lado, $\alpha(\lambda)$ será el tamaño del menor sumando de la partición. Por otro, empezando por el mayor sumando, $\beta(\lambda)$ es el número de partes consecutivas que se diferencian de la anterior en exactamente 1. En el ejemplo de la derecha $\beta = 3$, porque las tres partes mayores difieren en una unidad, pero ya no la cuarta.

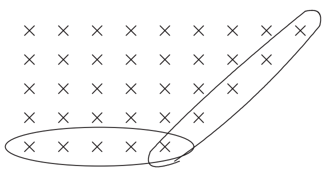
Definimos a continuación unas reglas que cambian la paridad del número de sumandos de una partición de n con partes distintas, distinguiendo dos casos.

Caso 1: $\boldsymbol{\alpha(\lambda) \leq \beta(\lambda)}$. A partir de λ construimos una partición λ^* quitando el menor sumando de λ y añadiendo sus α símbolos a las α partes mayores de la partición:



La partición λ^* sigue teniendo partes distintas; pero tiene un sumando menos que los que tuviera λ (cambia la paridad del número de partes).

En ocasiones, esta regla no se puede aplicar. Como ejemplo, supongamos que tenemos una partición del entero 35 (que es un número pentagonal) con todas sus partes distintas y $\alpha = \beta$, digamos iguales a 5, como en el esquema de la derecha. Como $\alpha = \beta = 5$, deberíamos aplicar esta primera regla, pero resulta imposible, pues si quitáramos las 5 aspas del último sumando y pretendiéramos añadírselos a los restantes sumandos, nos faltaría uno.



Esta situación se presentará siempre que tengamos $\alpha = \beta = m$ y haya un solapamiento como el que indica el dibujo anterior. Pero ese solapamiento se produce porque hay exactamente m partes, que son m, $m+1$, $\ldots$, $2m-1$. Así que n deberá ser de la forma

$$n = \sum_{j=0}^{m-1} (m+j) = m^2 + \sum_{j=1}^{m-1} j = m^2 + \frac{(m-1)\,m}{2} = \frac{m}{2}\,(3m-1)\,,$$

que es, para cada m, un número pentagonal (para $m = 5$, por ejemplo, obtenemos 35).

Caso 2: $\boldsymbol{\alpha(\lambda) > \beta(\lambda)}$. En este caso, quitamos el último símbolo de cada una de las β mayores partes, y los ubicamos formando un nuevo sumando (que será el más pequeño):

$$
\begin{array}{l}
\lambda \\
\left.\begin{array}{l}
\times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \boldsymbol{\times} \\
\times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \boldsymbol{\times}
\end{array}\right\}\beta=2 \\
\times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times \\
\times\ \times\ \times\ \times\ \times \\
\underbrace{\times\ \times\ \times}_{\alpha=3}
\end{array}
\quad\longrightarrow\quad
\begin{array}{l}
\lambda^* \\
\times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times \\
\times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times \\
\times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times \\
\times\ \times\ \times\ \times\ \times \\
\times\ \times\ \times \\
\boldsymbol{\times}\ \boldsymbol{\times}
\end{array}
$$

Obsérvese que λ^*, que tiene todas sus partes distintas, tiene un sumando más que λ. Pero, de nuevo, hay una excepción. Consideremos ahora el entero 26 y una partición suya con todos los sumandos distintos y $\alpha > \beta$, como la que mostramos bajo estas líneas. Al aplicar esta segunda regla, obtenemos la partición que aparece a la derecha.

$$
\begin{array}{l}
\lambda \\
\times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \boldsymbol{\times} \\
\times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \boldsymbol{\times} \\
\times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \boldsymbol{\times} \\
\times\ \times\ \times\ \times\ \boldsymbol{\times}
\end{array}
\quad\longrightarrow\quad
\begin{array}{l}
\lambda^* \\
\times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times \\
\times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times \\
\times\ \times\ \times\ \times\ \times \\
\times\ \times\ \times\ \times \\
\boldsymbol{\times}\ \boldsymbol{\times}\ \boldsymbol{\times}\ \boldsymbol{\times}
\end{array}
$$

Observe, lector, que la partición resultante no tiene todos los sumandos distintos. En general, nos encontraremos en esta situación siempre que $\alpha = \#$ partes $+ 1$ y que esas partes sean $m+1, \dots, 2m$. Es decir, cuando n sea de la forma

$$n = \sum_{j=1}^{m} (m+j) = m^2 + \sum_{j=1}^{m} j = m^2 + \frac{n\,(m+1)}{2} = \frac{m}{2}(3m+1)\,,$$

que es la otra familia de números del enunciado del teorema.

Recapitulamos: si n *no* es de la forma $m(3m \pm 1)/2$, entonces $p_{\text{par}}(n) = p_{\text{impar}}(n)$, pues la transformación $\lambda \to \lambda^*$ es una biyección entre el conjunto de particiones de n con número par de sumandos distintos y el de particiones de n con un número impar de sumandos distintos. Dejamos como ejercicio 5.3.14 para el lector la comprobación, que concluye la demostración, de que si $n = m(3m \pm 1)/2$, entonces $p_{\text{par}}(n)$ y $p_{\text{impar}}(n)$ difieren en $(-1)^m$. ∎

Cerramos aquí el estudio de las particiones, emplazando al lector interesado a que se reencuentre con ellas en[98] los capítulos 13 y 14, cuando ya dispongamos del poderoso lenguaje de las funciones generatrices, que permite codificar particiones de n (con variadas propiedades) muy eficazmente y facilita análisis más detallados que los hechos aquí. A modo de ejemplo, observe el lector que de $p_k(n)$ hemos aprendido mucho en este apartado, pero de la función $p(n)$ apenas nada, más allá de que ésta se puede calcular a partir de los primeros. ¿Habrá acaso una fórmula para $p(n)$? ¿O al menos una recurrencia? Lector, la hay; la asombrosa expresión

$$p(n) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \Big[p\Big(\frac{n - j(3j-1)}{2}\Big) + p\Big(\frac{n - (3j+1)}{2}\Big) \Big]\,,$$

en la que aparecen, ups, los números pentagonales. O, con un punto más de ambición[99], ¿es posible establecer el ritmo preciso de crecimiento de $p(n)$?

---

[98] ¿Cuántas veces nos han hecho ya esta sugerencia? Al final vamos a tener que mirarlos.
[99] Agárrese, que con esta pregunta vienen curvas.