Capítulo 2

Las técnicas básicas de la combinatoria

Contar es una técnica . . . y un arte. Averiguar cuántos objetos se ajustan a determinadas características puede no ser fácil[1]. En el caso de una colección física, concreta, de objetos se trata simplemente de enumerarlos, es decir, de decir quién es el primero, quién el segundo, etc. Pero si, como es habitual, lo que tenemos es una colección definida *abstractamente* (como por ejemplo el conjunto de números enteros que cumplen una determinada propiedad, o los posibles resultados de un cierto algoritmo, o. . .), el procedimiento debe ser otro. Con frecuencia, la única alternativa es indirecta y consiste en comparar la colección dada con otra colección de objetos (cuyo número ya conocemos) y comprobar, si fuera el caso, que tienen el mismo número de objetos. En este capítulo discutiremos técnicas útiles para seguir este enfoque; pero cómo seleccionar la colección adecuada con la que comparar es una cuestión de experiencia, y de prueba y error: todo un arte.

Las colecciones de objetos que nos interesarán vienen a veces ordenadas de forma natural, y otras veces el orden resulta irrelevante. En ocasiones las colecciones se forman atendiendo a ciertos principios de exclusión que impiden repeticiones, y en otras no. Estos dos condicionantes, orden y repetición, aparecen en cualesquiera cuestiones de combinatoria. Y siempre, en cada caso particular, habrá que precisarlos.

Para describir la situación en la que el orden en que se presentan los objetos de la colección es irrelevante utilizaremos *conjuntos*; y usaremos *listas* cuando el orden sí sea importante. Además, en cada caso, distinguiremos (acuñando términos para ello) entre cuando se permite repetición de objetos y cuando no. Las definiciones que siguen son más bien definiciones ingenuas (en el más noble sentido del término), intuitivas y naturales. Paul Halmos[2] decía que

> [$\cdots$] en teoría de conjuntos, "naif" y "axiomático" son términos contrapuestos.

Apelaremos en ocasiones a los conocimientos previos del lector, al que, de hecho, supondremos familiarizado[3] ya con varias de las nociones que usaremos: conjuntos, aplicaciones,

[1]Es bien sabido que hay tres tipos de matemáticos: los que saben contar y los que no.
[2]En su delicioso libro *Naive set theory.*
[3]No nos referimos aquí a las familias mal avenidas, ni tampoco a las mafiosas, sino a una familiaridad

biyecciones, etc., de manera dedicamos estas primeras páginas esencialmente a fijar notación y nomenclatura. Halmos de nuevo:

> Todo matemático acepta que todo matemático debe saber algo de teoría de conjuntos; el desacuerdo comienza al intentar decidir cuánto es algo.

Un **conjunto** es una colección (*no ordenada*) de objetos distintos, a los que llamaremos sus elementos. Denotamos por Ø al conjunto vacío, aquél que no tiene elemento alguno. Generalmente, representaremos un conjunto escribiendo sus elementos entre *llaves*. Por ejemplo,

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4\}.$$

En la expresión anterior no suponemos ningún orden especial de los objetos, y el haberlos numerado es simple convención. Llamaremos **tamaño** de un conjunto al número de elementos de que consta. Por ejemplo, si tenemos los objetos a, b y c, podemos considerar los (tres) conjuntos de tamaño 2 que se pueden formar con ellos:

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\,,$$

Si permitimos que en el conjunto haya elementos repetidos, hablaremos de **multiconjuntos**[4].

En otras ocasiones convendrá considerar **listas**, colecciones *ordenadas* de objetos, en las que distinguiremos si se permite o no la aparición repetida de elementos (y para ello hablaremos de listas con y sin repetición permitida). Las representaremos generalmente escribiendo sus elementos entre *paréntesis*, o en ocasiones, pura insistencia visual, como una tira:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) \qquad \text{o quizás} \qquad \begin{array}{|c|c|c|c|} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline \end{array}$$

Aquí, los subíndices sí que son relevantes: por ejemplo, a_1 denota el *primer* elemento de la lista. El número de elementos de que consta una lista será su **longitud**. A veces llamaremos simplemente k-lista a una lista de longitud k. Como ejemplo, partiendo de los objetos a, b y c de antes, podemos considerar las (seis) listas sin repetición de longitud 2,

$$(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b)\,.$$

Si permitiéramos repetición de elementos, añadiríamos, en el caso de los conjuntos, a $\{a, a\}$, $\{b, b\}$ y $\{c, c\}$; y, en el caso de las listas, a (a, a), (b, b) y (c, c). Llamamos de nuevo la atención sobre el uso que hemos hecho de la notación de las llaves y los paréntesis en estas enumeraciones. Por ejemplo, el conjunto $\{a, b\}$ es el mismo que $\{b, a\}$, mientras que la lista (a, b) es distinta de (b, a).

Como comprobará el lector, en ocasiones tendremos que "mezclar" estos objetos y considerar, por ejemplo, conjuntos cuyos elementos son listas, o listas cuyos términos son conjuntos. Lo veremos en las páginas siguientes, donde nos entrenaremos en la tarea de decidir qué tipo de objetos son los adecuados para describir cada problema particular.

---

entendida como amable y cómoda amistad.

[4]Traducción directa del inglés *multiset*, que es un término acuñado por De Bruijn en los años 70 del siglo XX. Hay quien, alternativamente, habla de conjuntos con repetición permitida, conjuntos ponderados (donde los pesos son las repeticiones que se permiten), o incluso más descriptivamente, de sacos o bolsas. Aquí usaremos, a falta de un término que nos convenza más, multiconjuntos.

2.1. Aprendiendo a contar

Se dice que un conjunto A tiene **tamaño** (o **cardinal**) n si existe una función biyectiva f del conjunto $\{1,\dots,n\}$ en el conjunto A. Por convenio se asigna tamaño cero al conjunto vacío. Usaremos indistintamente (al menos en el caso finito) los siguientes términos y símbolos para referirnos al cardinal de un conjunto A:

- $|A|$, el cardinal de A;
- $\#A$, el número de elementos de A:
- el tamaño del conjunto A.

De manera que "contar" (el número de elementos de un conjunto) consiste en establecer una biyección entre los elementos de ese conjunto y un conjunto de números naturales[5]. Y eso es lo que hacemos, sin prestar atención al aparato formal que subyace, cuando por ejemplo contamos el número de alumnos que hay en un aula, empezando por uno de ellos y asignándole el 1 (quizás señalándolo, y con tono teatral, diciendo "uno" en alto), para luego pasar al siguiente, al que le asignaríamos el 2, etc. Note el lector que el resultado final, el número de elementos, no depende del orden en que se haga la asignación (es decir, de la biyección elegida), sino sólo de la cantidad de números naturales $1,2,\dots,n$ utilizados.

Por cierto, si *no se puede* establecer una biyección entre un conjunto A con $\{1,\dots,n\}$ *para ningún* $n\in\mathbb{N}$, entonces diremos que A es un conjunto **infinito**. Observe el lector cuántas negaciones en esta definición. La delicada (a la par que fascinante y ¡sí!, práctica) cuestión de ampliar la noción de cardinal a conjuntos infinitos será tratada con el esmero que requiere en la sección 2.4.

Una consecuencia directa de nuestra definición de cardinal o tamaño, usando las propiedades de (la composición de) biyecciones, es la siguiente:

Lema 2.1.1 (Recuento con biyecciones) *Si A y B son dos conjuntos y existe una aplicación biyectiva $f\colon A\to B$, entonces $|A|=|B|$.*

En palabras, dos conjuntos tienen el mismo cardinal si existe una biyección entre ellos.

Esta simple observación va a ser, de hecho, una de nuestras estrategias básicas de recuento: para establecer el tamaño de un cierto conjunto A, buscaremos un "diccionario" (una biyección) que transforme el problema de calcular $|A|$ en el de contar el número de elementos de otro conjunto B, un conjunto del que ya conozcamos su tamaño, o que se preste a algún otro tipo de análisis. Obsérvese que, en principio, los elementos de B no tienen por qué ser de la misma naturaleza que los del original. Veamos un par de ejemplos.

Ejemplo 2.1.1 *¿Cuál es el tamaño del conjunto $A=\{n\in\mathbb{N}\colon n$ es divisor de $6000\}$?*

Podríamos, desde luego, ir enumerando todos los números menores o iguales que 6000 e ir comprobando, uno a uno, si dividen o no a 6000. Pero un procedimiento más astuto y eficaz pasa por escribir el desarrollo en factores primos de 6000:

$$6000=2^4\cdot 3^1\cdot 5^3\,.$$

[5] Y nosotros toda la vida sin saberlo…

Ahora observamos que si n es divisor de 6000, entonces n ha de ser de la siguiente forma:

$$n = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma \quad \text{con} \quad 0 \le \alpha \le 4,\, 0 \le \beta \le 1,\, 0 \le \gamma \le 3.$$

Así que podemos establecer la biyección

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es divisor de } 6000\} \quad \longleftrightarrow \quad B = \left\{ \begin{array}{c} \text{3-listas} \\ (\alpha,\beta,\gamma) \end{array} \Big/ \begin{array}{c} 0 \le \alpha \le 4, \\ 0 \le \beta \le 1, \\ 0 \le \gamma \le 3. \end{array} \right\}.$$

Esta asignación es una biyección entre A y B porque la descomposición de un entero en factores primos es única (véase, por ejemplo, el lema 6.1.14). La conclusión inmediata es que $|A| = |B|$. En el ejemplo 2.2.2 evaluaremos el tamaño del conjunto B. ♣

EJEMPLO 2.1.2 *Sea X un conjunto con n elementos. Queremos determinar el tamaño de la colección de todos los subconjuntos que se pueden formar con los elemento de X, que llamaremos en lo que sigue el conjunto de las* ***partes de X****, y para el que usaremos el símbolo $\mathcal{P}(X)$.*

Digamos que $X = \{1, \dots, n\}$. Para identificar un subconjunto A de X, es decir, para dar $A \in \mathcal{P}(X)$, basta decidir si cada elemento de X está o no en el subconjunto. Codificamos estas decisiones con un 0 para los que no están en A, y con un 1 para los que sí lo están. Por ejemplo, si tomamos $X = \{1, 2, 3, 4\}$, la codificación

1	2	3	4
0	1	1	0

esto es, la lista $(0, 1, 1, 0)$, representa al subconjunto $A = \{2, 3\}$ de $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Volviendo a $X = \{1, 2, \dots, n\}$, algunos otros ejemplos de esta identificación serían:

$$\begin{array}{lcl} (0,1,1,\dots,1,1) & \longleftrightarrow & \{2,3,\dots,n-1,n\} \\ (0,0,0,\dots,0,0) & \longleftrightarrow & \emptyset \\ (1,1,1,\dots,1,1) & \longleftrightarrow & X \end{array}$$

Esta regla es una biyección entre el conjunto $\mathcal{P}(X)$ y el conjunto $\mathcal{B}$ formado por todas las n-listas con repetición permitida que podemos formar con los símbolos $\{0, 1\}$, que pronto aprenderemos a contar (ejemplo 2.2.3). ♣

2.1.1. Contando con aplicaciones, doble recuento y paso al complementario

La estrategia de contar estableciendo biyecciones es un caso particular (aunque el más relevante) de una técnica más general. Veamos un primer ejemplo.

EJEMPLO 2.1.3 *Divisores positivos y negativos de* 6000*.*

Queremos calcular el tamaño del conjunto C formado por los números enteros (positivos y negativos) que dividen a 6000, de los que (astutamente) excluimos al 0. En el ejemplo 2.1.1 habíamos analizado con cierto detalle el conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} \colon n|6000\}$ (la notación $a|b$ significa que a es un divisor de b). Claramente, A y C no tienen el mismo tamaño. Pero...

Consideramos la aplicación $f\colon C \to A$ dada por $f(n) = |n|$ para cada elemento $n \in C$. La aplicación es sobreyectiva, pues cada elemento de A tiene al menos una preimagen (un elemento de C con el que está relacionado a través de f), pero no es biyectiva, porque hay elementos de C cuyas imágenes coinciden (por ejemplo, 3 y -3 van ambos al 3). De hecho, cada elemento de A tiene *exactamente* dos preimágenes. Así que C, claramente, tiene el doble de elementos que A. ♣

En este ejemplo hemos usado, por un lado, la sobreyectividad, y por otro, una "regularidad" en el número de preimágenes de cada elemento, que en este caso eran dos. Una situación particularmente favorable. Para plantear la cuestión con más generalidad, necesitamos algo de notación.

Sean $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ dos conjuntos, y sea $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ una aplicación cualquiera entre ellos. Para cada elemento $y \in \mathcal{Y}$, llamaremos $\#\{f^{-1}(y)\}$ al número de preimágenes de y. Si ocurre que $\#\{f^{-1}(y)\} = k$ para cada $y \in \mathcal{Y}$, diremos que la aplicación es k a 1. El caso $k = 1$ (aplicaciones 1 a 1) es el de las aplicaciones inyectivas.

En lo que sigue, $\mathcal{X}$ será el conjunto cuyo tamaño queremos calcular, e $\mathcal{Y}$ el que ayudará en esa tarea, mediante f. Parece natural exigir que la aplicación f sea sobreyectiva, que no se "salte" ningún elemento de $\mathcal{Y}$, pues si lo hiciera podríamos eliminar de $\mathcal{Y}$ esos elementos redundantes para el recuento. Para esta aplicaciones sobreyectivas tenemos:

Lema 2.1.2 (Recuento con aplicaciones sobreyectivas) *Sean $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ dos conjuntos entre los que se ha establecido una aplicación* sobreyectiva $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$.

a) *Si la aplicación es 1 a 1, es decir, inyectiva (y por tanto biyectiva), entonces $|\mathcal{X}| = |\mathcal{Y}|$.*

b) *Si la aplicación f es k a 1, entonces $|\mathcal{X}| = k\,|\mathcal{Y}|$.*

c) *En general,*

$$|\mathcal{X}| = \sum_{y\in\mathcal{Y}} \#\{f^{-1}(y)\}\,.$$

d) *Si llamamos, para cada $k \geq 1$, $a_k = \#\big\{y \in \mathcal{Y} : \#\{f^{-1}(y)\} = k\big\}$, entonces*

$$|\mathcal{X}| = \sum_{k\geq 1} k\,a_k.$$

El apartado a) es el lema 2.1.1. El apartado b) es la generalización de a) que ya hemos utilizado en el ejemplo 2.1.3, y que usaremos con frecuencia en lo que sigue. Véase, por ejemplo, el comienzo de la sección 5.1.

Los apartados c) y d) no requieren en realidad que f sea sobreyectiva, como podrá comprobar el lector que siga con detenimiento la demostración de este lema. Pero obsérvese que en ellos no aparece explícitamente $|\mathcal{Y}|$, así que su utilidad en nuestra estrategia de recuento, que recordemos trata de relacionar los tamaños de $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$, suele ser limitada. De hecho, el apartado c), de imponente aspecto e indiscutible certeza, suele ser, de tan general, hasta inútil. La expresión de d), que se obtiene de la suma de c) sin más que clasificar los sumandos en términos de su tamaño, aún resultará valiosa en ocasiones.

Para probar este resultado, vamos a introducir una técnica simple, pero insospechadamente eficaz, llamada el *lema del doble recuento*[6]:

Lema 2.1.3 (del doble recuento) *Sea M una matriz numérica cualquiera, digamos que de dimensiones $n \times m$. El resultado obtenido al sumar los registros de cada fila y luego los resultados obtenidos (llamaremos a esto* ***sumar por filas****) coincide con el que se obtiene sumando cada columna y luego los resultados (****sumar por columnas****).*

El enunciado anterior es obvio. De hecho, ya lo utilizamos en la discusión de la página 48, sobre las manipulaciones con sumas dobles. Pero, como veremos más adelante, nos permitirá codificar de manera transparente resultados difíciles de abordar por otros métodos (en el principio de inclusión/exclusión, en grafos, en el lema de Hall, etc.). Antes de emplearlo en la demostración del lema 2.1.2, veamos un ejemplo simpático.

Ejemplo 2.1.1 **(Lema de los saludos)** *Consideremos una reunión de n personas que pueden conocerse o no entre sí. Si un par de personas se conocen, se saludarán (con un fuerte apretón de manos, por ejemplo). Comprobemos que el número de saludos, sea cual sea n o el número de personas que se conozcan entre sí, es siempre un número par.*

Parece claro: si a conoce a b, entonces a saluda a b y b saluda a a: ¡dos saludos! Y, en total, un número par de saludos. La comprobación formal, vía el lema del doble recuento, pasa por considerar la matriz cuyas filas van etiquetadas con las n personas de la reunión, digamos $a_1, \ldots, a_n$; y cuyas columnas tienen, como etiquetas, a todos los subconjuntos $\{a_j, a_k\}$ de personas que realmente se conozcan entre sí. Colocamos un 1 en la posición correspondiente a la fila a_i y la columna $\{a_j, a_k\}$ si la persona a_i es una de las del par $\{a_j, a_k\}$. La clave es que cada columna contiene sólo dos unos, así que la suma por columnas da un número par. Mientras que al sumar en la fila de a_i, obtenemos el número de saludos en que interviene la persona a_i. Así que la suma por filas nos da el número total de saludos. Puede comprobar el lector que, además, el número de personas que efectúan un número *impar* de saludos debe ser, necesariamente, par. Para completar el análisis de esta (después de todo, entretenida) reunión, digamos también que, aplicando el principio del palomar, se puede comprobar también que necesariamente habrá (al menos) dos personas que efectúan el *mismo* número de saludos (véase el ejemplo 5.4.3)

El lector interesado puede consultar en el lema 9.1.3 y el ejercicio 9.1.8 la reformulación de esta cuestión en el lenguaje de la teoría de grafos. ♣

Vamos ya con la prometida:

Demostración del lema 2.1.2. Digamos que $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ y que $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_m\}$. La aplicación sobreyectiva $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ está dada.

[6]Lamentaríamos que nuestro entusiasmo por el doble recuento pudiera inducir al lector a amalgamar dentro de este término a la doble contabilidad. El doble recuento es un *truco*, la doble contabilidad es una *trampa*. *Nota de Nota*: No debe confundirse tampoco la doble contabilidad con la contabilidad de doble entrada. En 1494, Fray Luca Pacioli, del que hablaremos en la sección 6.2.1, quien es considerado el padre de la contabilidad moderna, publicó su libro *Summa de Arithmetica*, treinta y seis de cuyos capítulos estaban dedicados a explicar la partida doble, o contabilidad de doble entrada, como mecanismo contable. Johann Wolfgang von Goethe, quizá el escritor más influyente de finales del siglo XVIII, describiría el sistema de Pacioli como "algo de perenne belleza y simplicidad, y uno de los mayores logros del intelecto humano".

Construimos una matriz $n \times m$ con columnas etiquetadas con los elementos de $\mathcal{Y}$ y filas etiquetadas con los de $\mathcal{X}$. Las entradas de la matriz serán, en este caso, ceros o unos: colocaremos un 1 en la posición (i, j) si $f(x_i) = y_j$, y un 0 en caso contrario. La matriz obtenida tendrá un aspecto como el que aparece a la derecha.

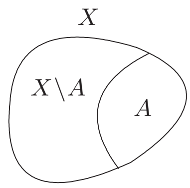
	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_m
x_1	1	0	0	$\cdots$	0
x_2	0	0	1	$\cdots$	0
x_3	0	0	0	$\cdots$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_n	1	0	0	$\cdots$	0

Como f es una aplicación, cada fila contiene exactamente un 1, pues cada elemento de $\mathcal{X}$ tiene una única imagen. Así que cada fila suma 1, y la suma por filas vale $|\mathcal{X}|$.

Por su parte, la columna etiquetada con el elemento y_j contiene tantos unos como preimágenes tenga y_j, y sumando estos resultados obtenemos, vía el lema del doble recuento, la expresión c) del lema. Obsérvese que aquí no es necesaria la sobreyectividad, pues si se diera el caso de que algún y_j no tuviera preimagen, entonces $\#\{f^{-1}(y_j)\}$ valdría 0.

Pero si, como supusimos al principio, la aplicación es sobreyectiva, entonces no habrá columnas que contengan solo ceros. Si además f es inyectiva, entonces en cada columna aparece *exactamente* un 1, y sumando en todas las columnas obtenemos $|\mathcal{Y}|$ unos, que es el apartado a). En general, si la aplicación es k a 1, tendremos que $|\mathcal{X}| = k\,|\mathcal{Y}|$. Note el lector cómo en estos casos particulares la hipótesis de sobreyectividad es fundamental para poder escribir $|\mathcal{X}|$ en términos de $|\mathcal{Y}|$. ∎

Quizás el lector encuentre excesivo, a estas alturas, introducir toda esta maquinaria. Pero podrá comprobar en lo que sigue cuán útil resulta ser capaces de formalizar ideas tan naturales sobre el recuento.



Finalizamos este apartado con una última técnica, conocida como el *paso al complementario*. Partimos de un conjunto X. Estamos interesados en contar cuántos elementos contiene un subconjunto A suyo. Habitualmente, los elementos de A vienen caracterizados por cumplir cierta propiedad. Vamos a considerar el subconjunto de X formado por los elementos de X que *no están* en A; esto es, los que no cumplen la propiedad que caracteriza a los elementos de A. A este conjunto lo llamaremos el **conjunto complementario de A en X**, y lo describiremos con el símbolo $X \setminus A$. O quizás simplemente A^c, si es que el propio contexto hace innecesaria la mención al conjunto X que incluye a A y dentro del que se está definiendo su complementario. El esquemático dibujo de la derecha aclara la idea.

En muchas ocasiones, resulta más sencillo calcular el tamaño del conjunto $X \setminus A$ que el del propio A. En esos casos, y siempre que conozcamos también el tamaño de X, podremos aplicar la siguiente regla (que en realidad es un caso particular de la regla de la suma, que estudiaremos en la sección 2.3):

Lema 2.1.4 (Paso al complementario) *Dado un conjunto X y un subconjunto A suyo,*

$$|X| = |A| + |X \setminus A|\,, \quad \textit{esto es,} \quad \boxed{|A| = |X| - |X \setminus A|}\,.$$

La expresión de la derecha permite calcular $|A|$ de manera indirecta, si es que sabemos contar cuántos elementos tienen su complementario y el conjunto total. A la espera de aplicaciones más excitantes de este argumento de paso al complementario, que llegarán, lo prometemos, lo ilustramos con un sencillo ejemplo, que complementa el ejemplo 2.1.1.

EJEMPLO 2.1.1 *¿Cuántos números entre* 1 *y* 6000 *no dividen al propio* 6000*?*

El conjunto de interés es $C = \{n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 60000 : n \text{ no divide a } 6000\}$, que está incluido en $X = \{1, 2, \ldots, 6000\}$. Claramente $|X| = 6000$.

Recuérdese que $6000 = 2^4 \times 3 \times 5^3$. Para contar los no divisores de 6000, podríamos empezar quitando (de X), por ejemplo, los múltiplos de 7 (que claramente no dividen a 60 000), pero también los múltiplos 9, y los de 13, y los de... Pero, ¿qué hacemos por ejemplo con los múltiplos de 7×13, que hemos eliminado en el paso anterior *dos* veces? Esta estrategia de ir quitando sucesivamente conjuntos, para luego tener en cuenta las posibles intersecciones, recibe el nombre de principio de inclusión/exclusión, como explicaremos en la sección 2.3.2.

Pero veamos cómo en este caso nos podemos ahorrar el algo penoso proceso anterior argumentando por paso al complementario. En el ejemplo 2.1.1 consideramos el conjunto $A = \{n \in \mathbb{N}\colon n \text{ divide a } 6000\}$. Para empezar, A también está incluido en X, pues los divisores de 6000 son todos ≤ 6000. Pero más aún, A resulta ser, justa y afortunadamente, $X \setminus C$, pues A contiene a los enteros entre 1 y 6000 que dividen a 6000, y C a los que no lo dividen. Así que, pasando al complementario concluimos que

$$|C| = |X| - |X \setminus C| = 6000 - |A|\,.$$

Remitimos al ejemplo 2.2.2, en el que remataremos todos estos cálculos. ♣

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 2.1

2.1.1 *Se forman todas las listas de longitud* n *con los números* $\{1, \ldots, 6\}$ *y con repetición permitida. Una tal lista se dice impar si la suma de los números que la forman es impar, y par en caso contrario.*

a) *Demuéstrese que la mitad de las listas son pares.*

b) *¿Ocurriría lo mismos si las listas estuvieran formadas con los números* $\{1, 2, \ldots, 7\}$*?*

2.2. La regla del producto

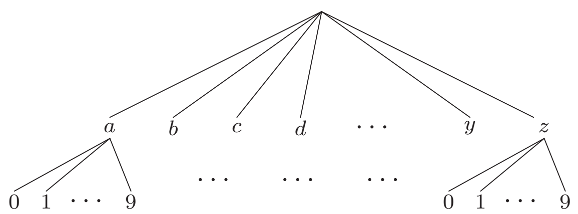
En el análisis de cuestiones combinatorias, además del método general de las biyecciones (y sus variantes) que vimos en la sección 2.1.1, existen dos estrategias fundamentales de recuento que en la práctica suponen dividir el problema en otros más pequeños, para luego reunir los resultados parciales obtenidos, bien sumándolos, bien multiplicándolos.

La primera estrategia consiste en *clasificar* los elementos del conjunto cuyo tamaño queremos evaluar en unas cuantas categorías, para luego "sumar" los tamaños de las clases. A esta idea nos referiremos como la *regla de la suma*. En ocasiones ocurrirá que, al clasificar, las distintas categorías tengan intersecciones entre sí, lo que exigirá un recuento más detallado, al que nos referiremos como el *principio de inclusión/exclusión*. Trataremos esta estrategia en la sección 2.3.

La segunda estrategia, de la que nos ocupamos ahora, consiste en diseñar un procedimiento (secuencial) que vaya construyendo todos los elementos del conjunto de interés, para luego contar el número de elementos obtenidos con una multiplicación. Ésta es la llamada *regla del producto*.

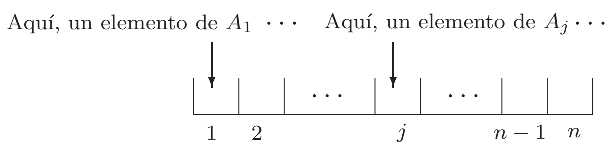
Como puede observar el lector, la primera tiene que ver con conjuntos, mientras que la segunda está asociada de manera natural a listas. Cuándo se debe usar una u otra dependerá de la estructura de la cuestión combinatoria que nos interese. En las páginas que siguen el lector podrá entrenarse con un buen número de ilustraciones.

Empezamos con un ejemplo sencillo. Digamos que queremos contar el número de "palabras" que podemos formar con una letra y un número (en este orden), suponiendo que disponemos de 27 letras $\{a, \dots, z\}$ y de 10 números, $\{0, \dots, 9\}$. Las palabras a las que nos referimos son listas de dos posiciones, en las que situamos una letra seguida de un número, como por ejemplo $(b3)$ ó $(c9)$.

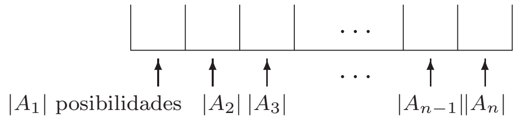


Para formar una de estas palabras, seguramente el lector escogerá, sucesivamente y en este orden, primero la letra y luego el número. Representamos todas las posibilidades que se obtienen con este procedimiento de construcción con un esquema (un "árbol") como el de la derecha. En el primer "piso" del árbol situamos las 27 posibles elecciones de letra. Y luego, para cada posible elección de letra, tenemos 10 posibilidades para el número. Cada una de las ramas del "árbol" dibujado nos conduce a un resultado distinto. La conclusión es que hay $27 \cdot 10 = 270$ palabras distintas, pues por cada elección de letra hay 10 elecciones posibles de números; y hay 27 elecciones iniciales de letra distintas.

Generalizamos: digamos que queremos contar el número de n-listas en las que el primer elemento pertenece a un cierto conjunto A_1, el segundo a otro conjunto A_2, etc.:

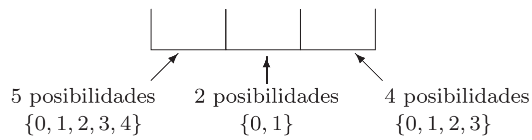


Tenemos $|A_1|$ posibles elecciones para la primera posición. Y, *para cada una de ellas*, $|A_2|$ para la segunda. Y por cada elección del símbolo de las dos primeras posiciones, tendremos $|A_3|$ posibilidades para la tercera. Etc. Así que el número total de listas es $|A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|$. Ésta es la *regla del producto*.



Resolvamos algunos ejemplos que teníamos pendientes.

EJEMPLO 2.2.2 *El número de divisores positivos de* 6000*, segunda parte.*



En el ejemplo 2.1.1 vimos que bastaba con contar el número de 3-listas (α, β, γ) donde $0 \le \alpha \le 4$, $0 \le \beta \le 1$ y $0 \le \gamma \le 3$. Se trata de listas como las que se muestran a la izquierda. Aplicando la regla del producto, tendremos en total $5 \times 2 \times 4 = 40$ listas, y por tanto 40 divisores positivos de 6000. ♣

EJEMPLO 2.2.3 *El número de subconjuntos distintos que podemos extraer de un conjunto con n elementos, segunda parte.*

Sea el conjunto $X = \{1, 2, \dots, n\}$; ya establecimos, en el ejemplo 2.1.2, la biyección

$$\mathcal{P}(X) = \{\text{subconjuntos de } X\} \longleftrightarrow \mathcal{B} = \left\{ \begin{array}{c} n\text{-listas de ceros y unos} \\ \text{con repetición permitida} \end{array} \right\}.$$

Calculamos el tamaño de $\mathcal{B}$ (y con ello, también el de $\mathcal{P}(X)$) aplicando la regla del producto: para la primera posición tendremos dos posibilidades, para la segunda otras dos, etc. Así que

$$|\mathcal{B}| = 2^n \quad \Longrightarrow \quad \boxed{|\mathcal{P}(X)| = \#\{\text{subconjuntos de un conjunto de tamaño } n\} = 2^n}$$

♣

EJEMPLO 2.2.4 *El sistema de matriculación de vehículos en España.*

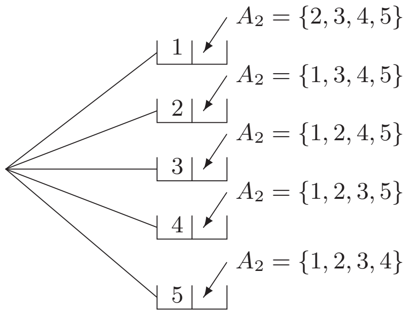
En el sistema antiguo, una matrícula, digamos en la provincia de Madrid, era de la forma `M 1397 TF`, es decir, una lista de siete posiciones: la letra que identificaba la provincia, cuatro números y otras dos letras (entre las que no se cuentan ni la Ñ ni la Q). Dado que la primera letra es siempre una M, podemos olvidarnos de ella y limitarnos a contar el resto. Aplicando la regla del producto, obtenemos que el número de matrículas madrileñas distintas posibles es $10^4 \times 25^2 = 6250000$, algo más de seis millones.

A finales del año 2000, este sistema estaba a punto de agotarse. Tras diversas discusiones, se decidió adoptar un nuevo tipo de matrículas (sin distintivos provinciales): una lista de cuatro números, seguida de tres letras (se excluyen las vocales y las consonantes Ñ y Q). Por ejemplo, `0000 BBB`. Tenemos así un total de $10^4 \times 20^3$ posibilidades, esto es, 80 millones de matrículas distintas para toda España[7]. ♣

[7] El ritmo anual de matriculaciones en España es, en estos albores del siglo XXI, de aproximadamente dos millones de vehículos. Evalúe el lector el periodo de vigencia de este nuevo sistema si se mantuviera este ritmo.

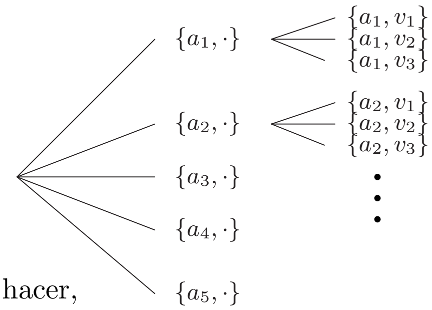
La regla del producto se puede aplicar en situaciones más generales que la descrita hasta ahora, en la que se exigía conocer los conjuntos de símbolos $A_1, \dots, A_n$ (y sus tamaños) que se pueden usar en cada posición de la lista. En realidad basta con que nos aseguremos de que, en cada paso, el número de posibilidades sea *fijo*.

Digamos por ejemplo que nos interesa contar cuántas 2-listas se pueden formar con los símbolos $\{1, \dots, 5\}$ de manera que no aparezcan símbolos repetidos. Para la primera posición tenemos cinco posibilidades: $A_1 = \{1, \dots, 5\}$. ¿Y para la segunda? Pues depende. Si por ejemplo hemos situado el símbolo 5 en la primera posición, entonces A_2 sería $\{1, 2, 3, 4\}$. Mientras que si la lista empezara por 1, tendríamos $A_2 = \{2, 3, 4, 5\}$. Pero sea cual sea el símbolo elegido en la primera posición, lo cierto es que disponemos de *cuatro* posibilidades para la segunda. Lo que nos $5 \times 4 = 20$ listas. Véase el esquema en árbol de la derecha.



El que en cada paso haya un número de posibilidades fijo e independiente de lo elegido hasta ese momento es crucial. Digamos que queremos contar el número de 2-listas con ceros y unos que no tienen dos ceros. Hay dos posibilidades para la primera posición; pero el número de posibilidades para la segunda *depende* del símbolo seleccionado en la primera: habrá una si hemos colocado un 0, y dos si ha sido un 1. Veremos más adelante cómo abordar este tipo de cuestiones.

La regla del producto está asociada de manera natural a listas, aunque en ocasiones se puede aplicar a situaciones en las que, a priori, no hay orden prefijado. Digamos que tenemos cinco cartas azules numeradas, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, y tres cartas verdes, también numeradas: v_1, v_2, v_3. Queremos seleccionar una de cada, es decir, formar un *conjunto* de tamaño dos con una carta de cada color. Para contar de cuántas maneras distintas se puede hacer,



- decidimos primero qué carta azul aparecerá (hay 5 posibilidades);
- para luego decidir la carta verde (3 posibilidades),

y obtenemos así que hay $5 \times 3 = 15$ posibles conjuntos. Observe, lector, que podríamos haber elegido primero la verde, y luego la azul, sin alterar el resultado del recuento. Note también que la cuestión trata de conjuntos (sin orden interno, en principio), pero que su estructura (el que una carta tenga que ser azul y otra verde) permite adecuarla al contexto (listas, orden) en el que la regla del producto es aplicable. Véase la figura arbórea de la derecha.

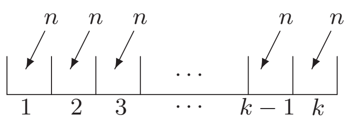
2.2.1. Listas con y sin repetición

Un problema frecuente de la combinatoria consiste en evaluar el número de listas de cierta longitud, digamos k, en cuyas posiciones podemos situar símbolos de un cierto conjunto (o ciertos conjuntos), pero en las que, además, exigimos que se cumplan ciertas **restricciones**.

Como acabamos de ver, si estas “restricciones” consisten en que en cada posición solo se pueden utilizar los elementos de ciertos conjuntos, la regla del producto permite resolver la cuestión, siempre que el número de posibilidades para cada posición *no dependa* de lo elegido en las posiciones anteriores.

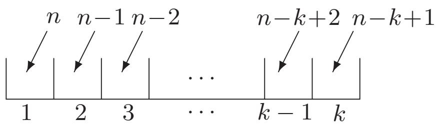
Los ejemplos que abordaremos en esta sección entran en esta categoría, y merecen una especial atención, pues, como el lector podrá comprobar, aparecen continuamente en los análisis combinatorios. Partimos de un conjunto A con n símbolos que, para fijar ideas, supondremos que es el conjunto $\{1,\dots,n\}$. Queremos formar listas de longitud k con los elementos de A.

A. Permitimos la repetición de símbolos. Con esto queremos decir que en las posiciones de la k-lista podría haber símbolos repetidos (aunque no es obligatorio). Como en cada posición podemos situar cualquier símbolo de $\{1,\dots,n\}$, tendremos n posibilidades para la primera posición de la lista, otras n para la segunda, y así sucesivamente. Por tanto, aplicando la regla del producto,



$$\boxed{\#\left\{\begin{array}{c} k\text{-listas con repetición permitida} \\ \text{formadas con elementos de } \{1,\dots,n\} \end{array}\right\} = n^k}$$

B. No permitimos repetición de símbolos. Para empezar, si $k > n$ no se pueden formar k-listas sin repetición con n símbolos, pues no tendríamos suficientes símbolos para cumplir la condición de no repetición. Digamos entonces que $k \le n$ y apliquemos, de nuevo, la regla del producto. Para la primera posición, tenemos n posibilidades. En los términos habituales, $A_1 = A$, que tiene tamaño n. Para la segunda, como en un ejemplo que vimos antes, el conjunto A_2 de símbolos disponibles depende de lo elegido en la primera. Pero no su tamaño, que es lo único que exige la regla del producto: habrá siempre $n-1$ posibilidades (todos los símbolos, menos el usado en la primera). Para la tercera tendremos $n-2$ posibilidades (todos los símbolos, menos los usados en las dos primeras). Y así sucesivamente. De manera que, para $k \le n$,



$$\boxed{\#\left\{\begin{array}{c} k\text{-listas sin repetición} \\ \text{formadas con } \{1,\dots,n\} \end{array}\right\} = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

A la derecha hacemos uso de la notación de factoriales. Recordemos que, por convenio, se asigna el valor $0! = 1$.

Un caso especial, que merece atención y nombre propio, es aquél en el que formamos n-listas sin repetición con n símbolos. Estas listas se denominan **permutaciones**, y de ellas hay

$$\boxed{\#\{\text{permutaciones de } n \text{ elementos}\} = n!}$$

Una permutación de $\{1,\dots,n\}$, es decir, una n-lista sin repetición formada con esos símbolos, es simplemente una *reordenación* de los símbolos. El conjunto de las permutaciones tiene una estructura extremadamente rica, a la que prestaremos atención en la sección 5.2.

En el siguiente ejemplo contamos, en términos de listas, el número de aplicaciones que pueden establecerse entre dos conjuntos.

EJEMPLO 2.2.5 *Sean los conjuntos* $\mathcal{X} = \{1, \dots, n\}$ *e* $\mathcal{Y} = \{1, \dots, k\}$*. Queremos contar cuántas aplicaciones podemos establecer entre* $\mathcal{X}$ *e* $\mathcal{Y}$*.*

Una aplicación $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ se construye decidiendo cuál es la imagen de cada elemento de $\mathcal{X}$. Así que una tal aplicación es lo mismo que una *n-lista* en la que, en cada posición, situamos un símbolo de $\{1, \dots, k\}$: en la posición primera está la imagen del 1, en la segunda la del 2, etc. Como no hay restricción alguna sobre qué símbolos situamos (qué imágenes elegimos), estamos en el caso de listas con repetición permitida, así que

$$\boxed{\#\{\text{aplicaciones } f\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, k\}\} = k^n}$$

(obsérvense los papeles de n y k: ahora hay n posiciones y k símbolos).

Para contar las aplicaciones *inyectivas*, esto es, aquéllas en las que no hay elementos de $\mathcal{X}$ con la misma imagen, formamos listas con las mismas características que antes, pero en las que no permitimos repetición. La respuesta es que, si $k \geq n$,

$$\boxed{\#\{\text{aplicaciones inyectivas } f\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, k\}\} = \frac{k!}{(k-n)!}}$$

mientras que, si $k < n$, el número de aplicaciones inyectivas es 0.

Si lo que queremos son aplicaciones *biyectivas*, será necesario que $n = k$, y en ese caso habrá tantas aplicaciones biyectivas como permutaciones de $\{1, \dots, n\}$, a saber,

$$\boxed{\#\{\text{aplicaciones biyectivas } f\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}\} = n!}$$

Falta un caso, señalará el lector atento: las *sobreyectivas*. Este caso no se puede resolver de manera tan directa, y requiere algo más de maquinaria. Véase el ejemplo 5.1.1. ♣

Vamos ahora con una cuestión curiosa, y de respuesta quizás sorprendente.

EJEMPLO 2.2.6 *¿Cuál es la probabilidad* p *de que, de entre* 50 *personas escogidas al azar, al menos* ***dos*** *de ellas tengan la misma fecha de cumpleaños?*[8]

Antes de entrar en los detalles, atrévase el lector a adelantar una respuesta aproximada: ¿una probabilidad alta, baja? Veamos: hay 366 posibles fechas de cumpleaños, y sólo 50 personas en la muestra. Parece, mmm, difícil que haya coincidencias, ¿no?, lo que sugiere que la probabilidad del enunciado debería ser *pequeña*. Pero, como vamos a ver en un momento, esta intuición inicial falla estrepitosamente.[9]

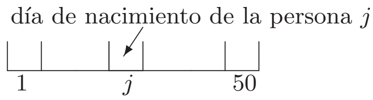
En nuestro análisis sólo haremos uso del habitual concepto de "probabilidad" como cociente entre los casos favorables y los casos posibles, de manera que se trata de una cuestión

[8]Esta cuestión de probabilidad es conocida como el *problema de los cumpleaños*, que se enmarca en lo que llamaremos genéricamente como el *problema de las coincidencias* en el capítulo 30.

[9]Lector: la intuición se educa.

puramente combinatoria[10]. Vamos con ella.

Observe, lector, que una "muestra" de fechas de cumpleaños es una *lista* de 50 posiciones (cada una de las cuales corresponde a una persona de la muestra), en cuyas posiciones colocamos el día del año que corresponde a cada persona (supondremos que hay 366 posibles, para incluir los años bisiestos). De manera que



$$\#\,\text{casos posibles} = \#\,\{50\text{-listas con repetición permitida extraídas de } \{1,\dots,366\}\} = 366^{50}.$$

Contar los casos favorables, es decir, aquellas listas en las que (al menos) se produce una repetición de símbolos, no es sencillo. Veamos: regla del producto. Para la primera posición, 366 posibilidades. ¿Y para la segunda? Bueno, querríamos que, al completar la lista, tengamos símbolos repetidos; pero no necesariamente ha de ser el situado en la primera posición; aunque podría serlo. Así que, ¿366 o 365 posibilidades? Sin embargo, el recuento de los casos "desfavorables" es casi directo, pues las listas "desfavorables" son las 50-listas en las que no hay dos símbolos iguales (no hay dos personas con la misma fecha de cumpleaños). Esto es, listas sin repetición:

$$\#\,\text{casos desfavorables} = \#\left\{\begin{array}{c}\text{50-listas sin repetición}\\ \text{con los símbolos } \{1,\dots,366\}\end{array}\right\} = 366\times 365\times\cdots\times 317.$$

Y por lo tanto, con el lema 2.1.4 de paso al complementario, concluimos que

$$p = \frac{\#\,\text{casos favorables}}{\#\,\text{casos posibles}} = \frac{\#\,\text{posibles} - \#\,\text{desfavorables}}{\#\,\text{posibles}} = 1 - \frac{366\times 365\times\cdots\times 317}{366^{50}}.$$

Usando un ordenador/calculadora, comprobamos que el cociente de la derecha vale aproximadamente 2.99 %, y por tanto que la probabilidad de que haya (al menos) una coincidencia es $p \approx 97.01\,\%$.

Como alternativa para estimar el aparatoso producto anterior, podemos usar la desigualdad $1-x \le e^{-x}$, que es válida para cualquier $x\in\mathbb{R}$ (véase el lema 3.4.5), para escribir que

$$\begin{aligned} 1-p &= \frac{366\cdot 365\cdots 318\cdot 317}{366\cdot 366\cdots 366\cdot 366} = \frac{366}{366}\cdot\frac{(366-1)}{366}\cdot\frac{(366-2)}{366}\cdots\frac{(366-49)}{366} \\ &= 1\cdot\Big(1-\frac{1}{366}\Big)\cdot\Big(1-\frac{2}{366}\Big)\cdots\cdot\Big(1-\frac{49}{366}\Big) \le \prod_{j=0}^{49} e^{-j/366} \\ &= \exp\Big\{-\frac{1}{366}\sum_{j=0}^{49} j\Big\} = \exp\Big\{-\frac{1}{366}\frac{49\times 50}{2}\Big\} \approx 3.49\,\%, \end{aligned}$$

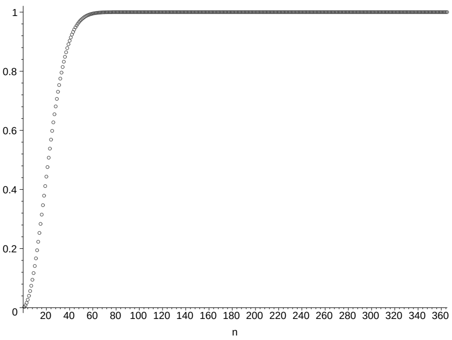
[10]En este análisis simplificado subyace la hipótesis de que todas las fechas de nacimiento son "igualmente probables". Esto supone una cierta inexactitud, porque por ejemplo el 29 de febrero aparece, más o menos, la cuarta parte de veces que las demás fechas. Y en realidad, hay meses en los que se celebran más cumpleaños que otros (aunque esto depende de los países, las culturas, el clima y de otros factores en cuyos detalles no entraremos). Así que, en un modelo más ajustado, no todas las listas de 50 posiciones habrían de ser igualmente probables, de manera que el análisis del problema habría de ir más allá de la simple enumeración de casos favorables y posibles. Pero, como veremos en el capítulo 30, el caso de la equiprobabilidad es en el que con más dificultad tendremos coincidencias.

donde hemos usado la fórmula (del ejemplo 1.2.1) para sumar los primeros 49 números naturales. Note, lector, que la aproximación obtenida es bastante buena.

La probabilidad de coincidencia en una reunión de 50 personas es altísima, del 97 %. Observe, lector, que esa coincidencia podría darse entre cualquier pareja de personas de la reunión, y en cualquiera de las fechas. Un amplio abanico de posibilidades que nuestra intuición inicial no había sabido captar. Como comparación, calculemos la probabilidad de coincidencia si fijamos la fecha en la que se produce. Por ejemplo, la probabilidad de que en una reunión de 50 personas, entre las que se halla el lector, haya alguien más con su (sí, la de usted) misma fecha de cumpleaños es, siguiendo un argumento similar al visto antes, $1-(365/366)^{49}$, que es aproximadamente un 12.55 %, apreciable, pero no tan alta como la de antes. Y la probabilidad de que, en la ya un tanto cansina reunión de 50 personas, haya al menos dos que cumplan años hoy (sí, justamente cuando lee estas líneas) es un muchísimo menor

$$1-\left[\left(\frac{365}{366}\right)^{50}+\frac{50\cdot 365^{49}}{366^{50}}\right]\approx 0.83\,\%,$$

donde hemos contabilizado por un lado las listas en las que no aparece la fecha de hoy, y por otro aquéllas en las que aparece una única vez la fecha de hoy (los dos casos, disjuntos, en los que no se da coincidencia).



Para completar el análisis de la cuestión de partida, nos preguntamos, ya con total generalidad, por cuál es la probabilidad p_n de que en una reunión de n personas haya al menos dos cuya fecha de cumpleaños coincida. Primero, como hay 366 posibles fechas, el principio del palomar nos dice que $p_n = 1$ si $n \geq 367$ (habrá con seguridad al menos una coincidencia, recuérdese el ejemplo 1.3.13). Así que $p_1 = 0$ (pues una única persona no da lugar a coincidencia), y p_n se estabiliza en el valor 1 a partir de $n = 367$. Entre medias, p_n es una función creciente con n, puesto que cuantas más personas haya en la reunión, mayor será la probabilidad de coincidencia. Argumentando como en el caso particular de $n = 50$, se obtiene la gráfica de la figura. Nótese cuán rápidamente tiende la probabilidad a 1. Por ejemplo, para una muestra[11] de 23 personas es un poco mayor del 50 %, mientras que con 60 personas ya es prácticamente 1. ♣

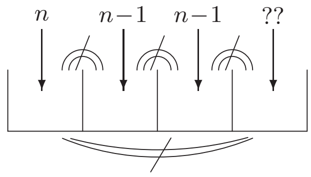
Ejemplo 2.2.7 *Queremos contar el número de k-listas ($k \geq 2$) con repetición permitida con símbolos de $\{1,\dots,n\}$ en las que cada elemento es distinto del anterior.*

Se trata de contar listas sin símbolos iguales en posiciones consecutivas. Aplicamos directamente la regla del producto: tenemos n posibilidades para la primera posición. Hay $n-1$ para la segunda (pues está prohibido el símbolo usado en la primera). Y también $n-1$ para la tercera (el usado en la segunda posición está prohibido). Y así sucesivamente, de manera que la respuesta final es $n(n-1)^{k-1}$. ♣

[11] Lector: haga usted mismo el *experimento*. Tome un grupo de, digamos, 50 personas y construya una cuadrícula con los 366 días del año, en la que cada persona marcará la casilla de su fecha de cumpleaños. Haga esto hasta que haya una casilla con dos marcas. Verá cómo (casi siempre) hay al menos una coincidencia.

EJEMPLO 2.2.8 *Añadimos ahora a las restricciones del ejemplo anterior una más: la primera y última posiciones deben llevar también símbolos distintos.*

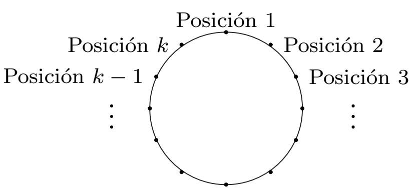
Los casos $k = 1$ y $k = 2$ son triviales[12]. El caso $k = 3$ se resuelve con la regla del producto: hay n posibilidades para la primera posición, $n - 1$ para la segunda y $n - 2$ para la tercera.



El lector, sin duda animado por la rápida y sencilla resolución de los ejemplos de esta sección, se estará ya esforzando en el análisis del caso $k = 4$, quizás con ayuda de una representación gráfica como la que mostramos a la derecha. Todo marcha bien al principio: para la primera posición tenemos n posibilidades y para la segunda y tercera, $n-1$ (pues está prohibido el símbolo de la posición anterior). Pero, ¡ay!, en la cuarta posición, el número de símbolos prohibidos *depende* de la lista construida hasta el momento. Si, por ejemplo, hemos elegido el mismo símbolo en las posiciones 1 y 3, sólo habrá uno prohibido. Pero si hemos situado símbolos distintos, no podremos utilizar ninguno de ellos para la cuarta posición. ¿Y entonces? ♣

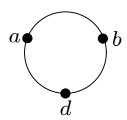
Entonces necesitamos más tecnología. Resolveremos este ejemplo particular, usando la regla de la suma, al comienzo de la sección 2.3. Pero si añadiéramos más restricciones, o el número de posiciones y símbolos fuera mayor, la cuestión se complica bastante, de modo que resulta conveniente desarrollar una maquinaria específica (el lenguaje de los grafos, y en concreto, los polinomios cromáticos), que estudiaremos en el capítulo 10.

2.2.2. Listas circulares



Fijamos ahora nuestra atención en otro tipo de objetos: las **listas circulares** de longitud k. Marcamos k puntos (espaciados regularmente) sobre una circunferencia, en cada uno de los cuales situamos un símbolo de un conjunto con n elementos. ¡Atención!, consideraremos que dos listas circulares son iguales si una se obtiene de la otra por alguna *rotación* (sobre el plano del papel). Vamos a tratar de contarlas a partir del número de listas lineales (es decir, las usuales), para después aplicar los resultados de la sección 2.2.1. Empecemos considerando **listas circulares sin repetición** y un primer ejemplo sencillo.

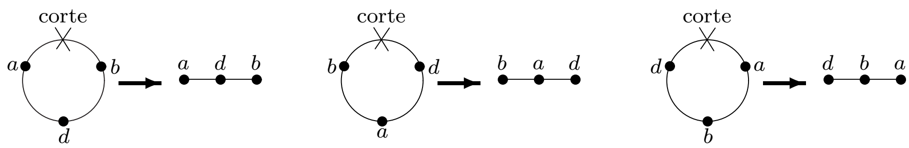
EJEMPLO 2.2.9 *Listas circulares con* $A = \{a, b, c, d, e\}$ *y* $k = 3$.



Tomemos, por ejemplo, la lista circular de la derecha. Procedamos como sigue para transformar listas circulares en lineales: imaginamos que se trata de un collar con cuentas, que cortamos por la parte superior, para luego desplegar el resultado. Aplicado a la lista dibujada, da lugar a la lista lineal (a, d, b), como se aprecia en el dibujo de

[12] "Trivial": adjetivo usado por los matemáticos para describir un argumento (supuestamente) sencillo, tanto que generalmente no se exhibe. A veces, sobre todo en artículos de investigación, el pretendido "argumento trivial" requiere, al final, un par de hojas de duros cálculos que el lector debe ser capaz de suministrar por sí mismo. Es también de uso común el adjetivo "obvio"; produce generalmente el mismo efecto irritante en el lector. Este uso de la palabra trivial proviene del *Trivium*, el conjunto de las tres disciplinas elementales (Gramática, Retórica y Dialéctica) que, junto a las más avanzadas del *Quadrivium* (Aritmética, Música, Geometría y Astronomía), conformaban las siete artes liberales en el sistema medieval de enseñanza.

la izquierda bajo estas líneas. Pero las dos posibles listas circulares que se obtienen de ésta por rotación (y que hemos declarado como “iguales”) dan lugar a listas lineales distintas, (b, a, d) y (d, b, a), respectivamente, como también se aprecia en el esquema.



Convénzase el lector de que esto es algo general: cada lista circular da lugar a tres listas lineales distintas. De manera que podemos establecer una aplicación 3 a 1 entre el conjunto de 3-listas con los símbolos $\{a, b, c, d, e\}$ y el de 3-listas circulares con los mismos símbolos. Como la aplicación es sobreyectiva (toda lista circular que podamos imaginar se relaciona con las correspondientes listas lineales), concluimos que $3 \cdot \#\{\text{3-listas circulares}\} = \#\{\text{3-listas lineales}\} = 5 \times 4 \times 3 = 60$, lo que nos da un 20 como respuesta final. ♣

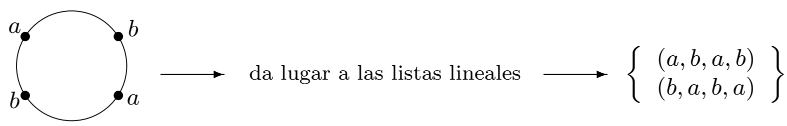
Consideremos, con más generalidad, un conjunto de n símbolos, digamos $\{1, \dots, n\}$ y los respectivos conjuntos de k-listas lineales (sin repetición) y k-listas circulares (sin repetición) con esos símbolos. Construyendo la respectiva aplicación (sobreyectiva y k a 1) del primer conjunto al segundo, deducimos que

$$\#\left\{\begin{array}{c} k\text{-listas circulares sin repetición} \\ \text{con símbolos de } \{1, \dots, n\} \end{array}\right\} = \frac{1}{k}\,\#\left\{\begin{array}{c} k\text{-listas lineales sin repetición} \\ \text{con símbolos de } \{1, \dots, n\} \end{array}\right\} = \frac{1}{k}\frac{n!}{(n-k)!}.$$

El análisis de *este* tipo de listas circulares ha sido sencillo. Pero al contar las **listas circulares con repetición permitida** aparecen nuevas dificultades, como ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.10 *Las 4-listas circulares con repetición permitida con los símbolos* $\{a, b\}$.

Empecemos con una de estas listas circulares:



Obtenemos solamente dos listas lineales (las otras dos posibles rotaciones no dan lugar a listas nuevas). Observemos, sin embargo, lo que ocurre para las dos siguientes listas circulares:

El análisis detallado de los distintos casos nos descubre que hay *seis* listas circulares distintas. Dos de ellas (las formadas por un único símbolo) tienen una única lista lineal asociada a cada una. La primera lista circular dibujada está asociada a dos listas lineales, mientras que las otras tres tienen cuatro listas lineales asociadas (para dar el total de las 16 listas lineales posibles). ♣

Como este ejemplo sugiere, no va a ser tarea sencilla contar el número de listas circulares en función del número de listas lineales, pues esa relación depende de qué símbolos aparezcan, y de su disposición. En el análisis de estas listas circulares subyace una rica estructura, que irá aflorando, ya con el lenguaje de las congruencias, en la sección 6.5. Quizás el lector quiera ya visitar la sección 6.5.2, para al menos echar un vistazo a la (insospechada) fórmula que da respuesta a la cuestión, en la que aparece una famosa función de la aritmética, la conspicua función de Euler. Más adelante, en los capítulos 27 y 28, retomaremos la cuestión desde otro punto de vista más general (con el lenguaje de la teoría de grupos).

2.2.3. Composiciones de un número natural

Presentamos ahora un nuevo espécimen de la fauna combinatoria: dado un número natural $n \geq 1$, dar una **composición** de n consiste en escribir n como suma de otros números naturales mayores o iguales que 1, de manera que el orden de presentación de estos sumandos *es relevante*. Llamaremos longitud de la composición al número de sumandos. Nos interesa saber cuántas composiciones distintas tiene n. Los primeros casos son sencillos:

$$\begin{array}{cccc}
n=1 & n=2 & n=3 & n=4 \\
\text{(1 comp.)} & \text{(2 comps)} & \text{(4 comps)} & \text{(8 comps)} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\left\{\ 1\ \right\} & \left\{\begin{array}{c} 1+1 \\ 2 \end{array}\right\} & \left\{\begin{array}{c} 1+1+1 \\ 1+2 \\ 2+1 \\ 3 \end{array}\right\} & \left\{\begin{array}{c} 1+1+1+1 \\ 2+1+1 \\ 1+2+1 \\ 1+1+2 \\ 2+2 \\ 3+1 \\ 1+3 \\ 4 \end{array}\right\}
\end{array}$$

Observe el lector que, por ejemplo, $4 = 2+1+1$, $4 = 1+2+1$ y $4 = 1+1+2$ son composiciones distintas, pues difieren en el orden de presentación de los sumandos. Estos primeros casos (los resultados 1, 2, 4, 8) parecen sugerir que hay 2^{n-1} composiciones distintas del número natural n.

Argumentamos, como es habitual, estableciendo biyecciones. Empezamos escribiendo n unos. Para indicar cómo se agrupan los unos para formar una composición, colocaremos entre ellos (hay $n-1$ posibles posiciones) cuadrados $\square$ y estrellas $\star$. Un símbolo $\square$ va a significar “siga adelante”, mientras que el símbolo $\star$ nos obligará a sumar todo lo que llevemos acumulado desde la $\star$ anterior. Así, por ejemplo, si $n = 7$,

$$\overbrace{1\quad 1\quad 1\ldots 1\quad 1}^{n}$$

$$\begin{array}{ccc}
1\,\square\,1\,\square\,1\,\square\,1\,\star\,1\,\square\,1\,\star\,1 & \longleftrightarrow & 4+2+1 \\
1\,\square\,1\,\star\,1\,\square\,1\,\square\,1\,\star\,1\,\square\,1 & \longleftrightarrow & 2+3+2 \\
1\,\star\,1\,\star\,1\,\star\,1\,\square\,1\,\star\,1\,\star\,1 & \longleftrightarrow & 1+1+1+2+1+1
\end{array}$$

Si comprobamos que esta correspondencia es una biyección, tendremos que:

$$\boxed{\#\,\{\text{composiciones del número } n\ \}} = \#\{(n-1)\text{-listas con los símbolos } \{\square,\star\}\} = \boxed{2^{n-1}}$$

$$\overbrace{1\square 1\square 1\star 1\ldots 1\square 1\ldots 1\square 1}^{n \text{ unos}}$$
$$\uparrow$$
colocamos una $\star$ tras los n_1 primeros unos y así sucesivamente

La comprobación de la biyectividad es sencilla. En un sentido, dada una composición del número n, del tipo $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$, donde $1 \leq n_i \leq n$, la representamos como aparece a la izquierda. Si ahora "olvidamos" de la lista de unos, obtenemos una lista de cuadrados y estrellas de longitud $n-1$: $(\square, \square, \star, \dots)$

En el otro sentido, dada una lista de longitud $n-1$ de cuadrados y estrellas, seguimos el proceso que se describe en el esquema de la derecha, en el que interpretamos, como arriba, los símbolos $\star$ como recordatorio de sumar todos los unos encontrados hasta entonces (y desde el último $\star$), para concluir que se obtiene *una única* composición del número n.

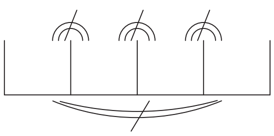
$$\begin{array}{c}
(\square, \square, \square, \star, \square, \star, \cdots, \star, \star, \star, \square) \\
\text{colocamos unos} \Big\downarrow \text{entre los símbolos } \square \text{ y } \star \\
(1\square 1\square 1\square 1\star 1\square 1\star\cdots\star 1\star 1\star 1\square 1) \\
\text{agrupamos los unos} \Big\downarrow \text{según la posición de las estrellas} \\
4+2+\cdots+1+1+2
\end{array}$$

En la sección 5.1.3 contaremos cuántas composiciones de n tienen una determinada longitud, digamos k.

Observe el lector que el argumento anterior no sería válido si el orden de presentación de los sumandos no fuera relevante. A la derecha mostramos un ejemplo ilustrativo. En este caso, cuando el orden de los sumandos es irrelevante, se suele hablar de *particiones* de n, y su recuento es una cuestión mucho más delicada, de la que nos ocuparemos ampliamente en la sección 5.3.3.

$$\begin{array}{ccc}
2+1 & \text{sería igual a} & 1+2 \\
\downarrow & & \downarrow \\
1\square 1\star 1 & & 1\star 1\square 1 \\
\downarrow & & \downarrow \\
(\square, \star) & \leftarrow \text{¡distintas!} \rightarrow & (\star, \square)
\end{array}$$

2.3. La regla de la suma y el principio de inclusión/exclusión



Como introducción a la técnica de clasificación conocida como la "regla de la suma", retomamos, del ejemplo 2.2.8, la cuestión de contar el número de 4-listas con repetición formadas con los símbolos $\{1, \dots, n\}$ con símbolos consecutivos distintos y tales que en la primera y cuarta posiciones también tuviéramos símbolos distintos. A la izquierda representamos gráficamente el tipo de listas que nos interesan. Al aplicar la regla del producto, el recuento secuencial (de izquierda a derecha) de posibilidades, nos encontrábamos, al llegar al último símbolo, con dos posibilidades, dependiendo de si en la primera y tercera posiciones habíamos escogido el mismo símbolo o no. Es razonable, pues, analizar los dos casos por separado:

- Si en la primera y tercera posiciones situamos el mismo símbolo, entonces tenemos n posibilidades para la posición 1 (y la tercera queda fijada). Para la segunda tenemos $n-1$ (el símbolo anterior está prohibido), mientras que para la cuarta hay un símbolo prohibido (el utilizado en 1 y 3). En total, $n(n-1)^2$.
- Si, por el contrario, utilizamos símbolos distintos en las posiciones 1 y 3, entonces

tenemos n para la primera, $n-1$ para la segunda, $n-2$ para la tercera (el de la segunda no se puede usar, y por construcción, el de la primera tampoco) y $n-2$ para la cuarta (prohibidos los símbolos, distintos, de las posiciones 1 y 3). En total, $n(n-1)(n-2)^2$.

El lector, por supuesto, estará tentado de sumar los dos resultados parciales, ¿qué otra cosa hacer?, si son casos excluyentes y estamos considerando todas las posibilidades, para obtener finalmente que el número de listas con las características exigidas es

$$n(n-1)^2 + n(n-1)(n-2)^2 = n(n-1)(n^2-3n+3)\,.$$

La formalización de esta intuición es lo que se conoce como *regla de la suma*. Hemos partido el conjunto total de listas en dos (sub)conjuntos: las del caso primero y las del segundo. Estos dos conjuntos de listas son *disjuntos* (claro, ¿no?) y, además, entre las listas de uno y otro tenemos todas las posibles. Pues habrá que sumar los resultados parciales. Enunciamos ya la regla en el caso general.

2.3.1. La regla de la suma

Lema 2.3.1 (Regla de la suma) *Sean un conjunto A y una colección de subconjuntos suyos $A_1, A_2, \dots, A_k$ que cumple que*

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i = A, \quad \text{y además que} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{si } i \neq j\,.$$

*Es decir, cada elemento de A está en uno y sólo uno de los A_k. A esta situación nos referiremos en lo sucesivo con que los subconjuntos $A_1, \dots, A_k$ son una **partición** del conjunto A. En estas condiciones,*

$$\boxed{|A| = \Big|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\Big| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|}$$

En la práctica, nos interesará contar el número de elementos de A, y lo que buscaremos será *clasificarlos* en las categorías $A_1, \dots, A_n$ (una partición de A), con la esperanza de que sepamos calcular los tamaños de todas estas clases.

	A_1	A_2	$\cdots$	A_k
a_1	1	0	$\cdots$	0
a_2	1	0	$\cdots$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_m	0	1	$\cdots$	1

Comprobamos la validez de la (casi obvia) identidad anterior con un argumento de doble recuento. Construyamos una matriz con los subconjuntos $A_1, \dots, A_k$ para etiquetar las columnas y los elementos de A para etiquetar las filas. Sumando los unos de una columna obtenemos el tamaño del subconjunto A_j que etiquete esa columna. Y sumando en cada fila, obtenemos el número de subconjuntos A_j a los que pertenece el elemento a_i que etiqueta la fila. En total,

$$\sum_{j=1}^{k} |A_j| = \sum_{a\in A} \#\{\text{ subconjuntos } A_1 \dots, A_k \text{ a los que pertenece } a\}$$

En el caso que nos incumbe, en el que tenemos una partición, cada elemento de A estará en uno y sólo uno de los A_j; así que lo de la derecha vale exactamente, tal y como queríamos,

$$\sum_{a\in A} 1 = |A|\,.$$

EJEMPLO 2.3.1 *Queremos contar el número de listas sin repetición que podemos formar con n símbolos, digamos $\{1,\dots,n\}$.*

Hacemos notar que aquí la longitud no está fijada *a priori*. Para contarlas, utilizamos la siguiente partición:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{listas sin repetición}\\ \text{formadas con } \{1,\dots,n\}\end{array}\right\} = \bigcup_{j=1}^{n} \left\{\begin{array}{c}j\text{-listas sin repetición}\\ \text{formadas con } \{1,\dots,n\}\end{array}\right\}.$$

Se trata, efectivamente, de una partición, pues cualquier lista tendrá una determinada longitud (entre 1 y n), y no se pueden tener dos longitudes distintas simultáneamente.

Así que, por la regla de suma,

$$\#\left\{\begin{array}{c}\text{listas sin repetición}\\ \text{con } \{1,\dots,n\}\end{array}\right\} = \sum_{j=1}^{n} \#\left\{\begin{array}{c}j\text{-listas sin repetición}\\ \text{con } \{1,\dots,n\}\end{array}\right\} = \sum_{j=1}^{n} \frac{n!}{(n-j)!} = n! \sum_{t=0}^{n-1} \frac{1}{t!};$$

(en el último paso cambiamos de j a $t = n-j$ como índice de sumación).

Supongamos ahora que n es "grande". Entonces, recordando los comentarios sobre la función exponencial de la sección 3.2, observamos que

$$\sum_{t=0}^{n-1} \frac{1}{t!} \approx e,$$

de manera que, a todos los efectos numéricos, el número de listas sin repetición con n símbolos es $e\cdot n!$. Esto es, casi tres veces $n!$.

Pero obsérvese que de longitud n hay exactamente $n!/0! = n!$, y de longitud $n-1$ hay otras $n!/1! = n!$. Esto ya da más de dos tercios de las totales. Con las dos siguientes longitudes, $n-2$ y $n-3$, acumulamos otras $n!/2$ y $n!/6$ listas. Es decir, la (abrumadora) mayoría de estas listas se concentran en las longitudes grandes. ♣

EJEMPLO 2.3.2 *Queremos multiplicar una lista $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ de $n+1$ números efectuando productos dos a dos, que delimitaremos con paréntesis de apertura y cierre. Los números siempre se escriben en el orden indicado. ¿De cuántas maneras distintas se puede hacer?*

Llamemos C_n al número de maneras de multiplicar esos $n+1$ números; por comodidad, pongamos que $C_0 = 1$. Cada multiplicación de una pareja requiere un paréntesis de apertura y uno de cierre, lo que daría n parejas de paréntesis en total. En nuestro análisis vamos a obviar los paréntesis de la última multiplicación, por ser innecesarios para el recuento. Habrá, pues, únicamente $n-1$ (parejas de) paréntesis que ubicar en la lista.

Éstos son los primeros casos:

$$\boxed{n=1}\qquad (a_0,a_1)\quad\longrightarrow\quad a_0\cdot a_1 \qquad\qquad \text{(1 manera)}$$

$$\boxed{n=2}\qquad (a_0,a_1,a_2)\quad\longrightarrow\quad \begin{cases}(a_0\cdot a_1)\cdot a_2\\ a_0\cdot(a_1\cdot a_2)\end{cases} \qquad \text{(2 maneras)}$$

$$\boxed{n=3}\qquad (a_0,a_1,a_2,a_3)\quad\longrightarrow\quad \begin{cases}a_0\cdot((a_1\cdot a_2)\cdot a_3)\\ a_0\cdot(a_1\cdot(a_2\cdot a_3))\\ (a_0\cdot a_1)\cdot(a_2\cdot a_3)\\ (a_0\cdot(a_1\cdot a_2))\cdot a_3\\ ((a_0\cdot a_1)\cdot a_2)\cdot a_3\end{cases} \qquad \text{(5 maneras)}$$

Si el lector se entretiene analizando los siguientes casos, obtendría las respuestas: 14, 42, 132... maneras. El objetivo es calcular el valor de C_n para un n general. Para ello, observemos que la última operación "$\cdot$" estará en cierto lugar de la lista, digamos entre a_k y a_{k+1}:

$$\underbrace{(a_0\dots a_k)}_{k+1}\cdot\underbrace{(a_{k+1}\dots a_n)}_{n-k}$$

Esto supone que los elementos a la izquierda ya se han multiplicado entre sí, es decir, que se han situado los paréntesis de cierta manera (y hay tantas como nos diga C_k); y que los de la derecha también se han multiplicado entre sí (habrá C_{n-k-1} formas de hacerlo). Aplicando la regla del producto, para un k fijo, tendremos $C_k\,C_{n-k-1}$ posibilidades. Como k puede valer entre 0 y $n-1$, y el índice describe una partición de los casos totales, la regla de la suma permite concluir que

$$C_n=\sum_{k=0}^{n-1}C_k\,C_{n-k-1}=C_0\,C_{n-1}+C_1\,C_{n-2}+\cdots+C_{n-1}\,C_0\,,\qquad \text{para cada } n\ge 1,$$

donde, como resulta conveniente, hemos definido $C_0=1$. La regla de recurrencia, que por otro lado es algo aparatosa, nos da el valor de C_n si conocemos todos los de índice menor.

Estos números C_n son conocidos como **números de Catalan**[13]. Sus primeros valores son $(1,2,5,14,42,132,429,1430,4862,16796,\dots)$. En el ejemplo 5.1.4 obtendremos, mediante argumentos combinatorios, una fórmula explícita para ellos. Fórmula que redescubriremos, con la ayuda del lenguaje de las funciones generatrices, en los ejemplos 12.2.2 y 12.3.4.

La sucesión de números de Catalan aparece como respuesta a multitud de cuestiones combinatorias, como las dos que siguen (véanse algunas más en el ejercicio 2.3.6).

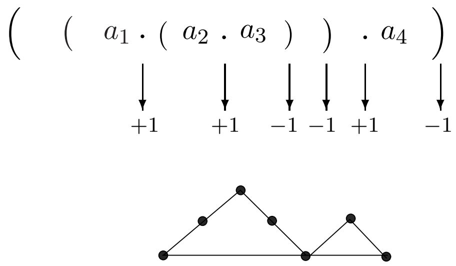
Pongamos, como sugeríamos antes, un paréntesis extra para describir la multiplicación final: así tenemos que el problema consiste en situar n paréntesis a lo largo de la secuencia; y hay también n multiplicaciones "$\cdot$", Si ahora sustituimos cada símbolo "$\cdot$" por un $+1$ y cada cierre de paréntesis ")" por un -1, obtenemos una lista de $2n$ números $(x_1,x_2,\dots,x_{2n})$, donde los x_j son ±1. Por ejemplo,

$$((2\cdot5)\cdot3)\cdot6)\longrightarrow(+1,-1,+1,-1,+1,-1)\,;\quad ((2\cdot5)\cdot(3\cdot6))\longrightarrow(+1,-1,+1,+1,-1,-1)\,.$$

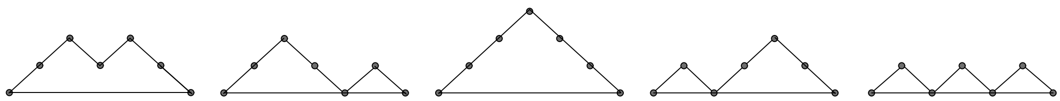
[13] En honor de Eugène Catalan (1814-1894), matemático belga que publicó trabajos sobre ellos.

Obsérvese que, en cada lista $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$, los x_j suman 0 entre todos ellos (pues hay tantos $+1$ como -1); y que, además, las sucesivas *sumas parciales* x_1, x_1+x_2, $x_1+x_2+x_3$, $x_1+x_2+x_3+x_4$, etc., son todas no negativas (nunca hay más cierres de paréntesis que multiplicaciones).

Con esta traducción, tenemos una interpretación gráfica simpática: hagamos que cada $+1$ represente una subida y cada -1, una bajada. Y así tenemos que cada lista se corresponde con un "perfil montañoso" o "sierra" que empieza y acaba a la misma altura (y nunca baja de esa altura inicial). Por ejemplo, una de las formas de situar tres paréntesis que exhibíamos antes se corresponden con las listas y montañas que dibujamos a la derecha.



Para $n = 3$, los cinco perfiles montañosos que se obtienen son:



♣

El siguiente ejemplo prepara el camino para la generalización de la regla de la suma que veremos en el siguiente apartado.

EJEMPLO 2.3.3 *Consideremos el conjunto A de las 4-listas con los símbolos $\{0, \ldots, 9\}$ tales que en la primera y segunda posiciones aparece un 0, o bien en la tercera y cuarta un 9.*

Consideremos, siguiendo la definición del conjunto A, los subconjuntos

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\text{4-listas con símbolos } \{0,\ldots,9\} \text{ con 0 en la } 1^{\text{a}} \text{ y } 2^{\text{a}} \text{ posiciones}\}, \\ A_2 &= \{\text{4-listas con } \{0,\ldots,9\} \text{ con 9 en la } 3^{\text{a}} \text{ y } 4^{\text{a}} \text{ posiciones}\}, \end{aligned}$$

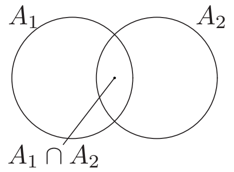
de manera que $A = A_1 \cup A_2$. Obsérvese que $|A_1| = 10^2$, pues las listas de A_1 son de la forma $(0, 0, \star, \star)$, donde en cada $\star$ hay que elegir un símbolo de los 10 disponibles. Análogamente, $|A_2| = 10^2$. Sin embargo, como

$$A_1 \cap A_2 = \left\{ \begin{array}{c} \text{4-listas con } \{0,\ldots,9\} \text{ tales que hay ceros} \\ \text{en la } 1^{\text{a}} \text{ y } 2^{\text{a}} \text{ posiciones y nueves en la } 3^{\text{a}} \text{ y } 4^{\underline{\text{a}}} \end{array} \right\} = \{(0,0,9,9)\} \neq \emptyset,$$

no se trata de una partición. En la suma $|A_1| + |A_2|$ estamos contando dos veces el elemento (0,0,9,9), que está en la intersección de A_1 y A_2. Adelantándonos al resultado que veremos en un momento, concluimos que la respuesta correcta es $|A_1 \cup A_2| = 10^2 + 10^2 - 1 = 199$. ♣

2.3.2. El principio de inclusión/exclusión

Como acabamos de ver, en ocasiones la clasificación natural de los elementos del conjunto de interés no es la ideal, en el sentido de que, aún incluyendo a todos los elementos, no constituye una verdadera partición, porque las partes tienen intersecciones entre sí. Vamos a ver a continuación cómo llevar la contabilidad de las veces que se cuentan de más o de menos los elementos que están en esas intersecciones.



La primera versión del principio de inclusión/exclusión, para el caso de dos conjuntos A_1 y A_2, dice así:

$$\boxed{|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|}$$

Una comprobación gráfica pasa por observar el diagrama (de Venn) de la derecha, en el que se observa que los elementos de $|A_1 \cap A_2|$ se cuentan dos veces en la suma $|A_1| + |A_2|$.

	A_1	A_2	$A_1 \cap A_2$
x_1	1	1	-1
x_2	0	1	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	1	0	0

Un argumento más formal, por doble recuento, va como sigue: llamemos $\{x_1, \dots, x_m\}$ a los elementos de $A_1 \cup A_2$. Construimos una matriz con filas etiquetadas con los elementos x_i. en cuyas entradas escribimos un 1 si el elemento x_i está alguno de los dos conjuntos (A_1 ó A_2), un -1 si está en $A_1 \cap A_2$, y un cero en el resto de los casos. Sumando por columnas obtenemos

$$|A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|\,,$$

mientras que cada fila (¡compruébese!) aporta un uno, así que entre todas ellas tendremos un total de $|A_1 \cup A_2|$ unos.

Ejemplo 2.3.4 *Calculemos el tamaño del conjunto A formado por las 3-listas con los símbolos $\{0, \dots, 9\}$ tales que, o bien en las posiciones 1ª y 2ª aparece el mismo símbolo, o bien en las posiciones 2ª y 3ª aparece el mismo símbolo.*

Consideramos los subconjuntos:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\text{3-listas con } \{0,\dots,9\} \text{ con igual símbolo en 1ª y 2ª}\},\\ A_2 &= \{\text{3-listas con } \{0,\dots,9\} \text{ con igual símbolo en 2ª y 3ª}\},\\ A_1 \cap A_2 &= \{\text{3-listas con } \{0,\dots,9\} \text{ con igual símbolo en 1ª, 2ª y 3ª}\}, \end{aligned}$$

y calculamos:

$$\begin{aligned} |A_1| &= \#\{\text{3-listas con } \{0,\dots,9\} \text{ de la forma } (n,n,m)\} = 10^2\,,\\ |A_2| &= \#\{\text{3-listas con } \{0,\dots,9\} \text{ de la forma } (n,m,m)\} = 10^2\,,\\ |A_1 \cap A_2| &= \#\{\text{3-listas con } \{0,\dots,9\} \text{ de la forma } (m,m,m)\} = 10\,. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$|A| = |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = 100 + 100 - 10 = 190.$$

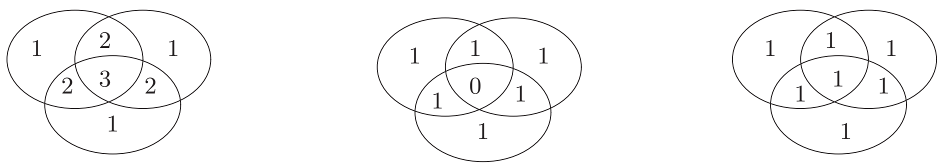
Aunque también podríamos haber resuelto el problema, de manera más directa, calculando el tamaño del complementario de A dentro del conjunto X de todas las 3-listas, $A^c = \{\text{3-listas tales que } 1^{\text{a}} \neq 2^{\text{a}} \text{ y } 2^{\text{a}} \neq 3^{\text{a}}\}$ La regla del producto nos dice que $|A^c| = 10 \times 9 \times 9$, así que $|A| = |X| - |A^c| = 10 \times 10 \times 10 - 10 \times 9 \times 9 = 190$. ♣

La expresión anterior para el tamaño de la unión de dos conjuntos es probablemente bien conocida. La expresión correspondiente para la unión de tres conjuntos es la siguiente:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|\,.$$

En esta expresión aparece la suma de los tamaños de los tres conjuntos, luego (restando) los tamaños de las (tres) posibles intersecciones dos a dos, y finalmente, con signo más, el tamaño de la intersección tres a tres. En los diagramas que mostramos debajo de estas líneas se registra cuántas veces se cuenta cada elemento (en las tres etapas) dependiendo de la parte de la unión en la que se encuentre. Obsérvese cómo al final cada uno se cuenta una única vez.

$|A_1| + |A_2| + |A_3|$ $\qquad -|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3|$ $\qquad +|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$



En la versión general que enunciamos a continuación se puede apreciar la estructura completa de este principio.

Lema 2.3.2 (Principio de inclusión/exclusión) *Dada una colección $A_1, \dots, A_n$ de conjuntos,*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \alpha_j,$$

donde los α_j son las sumas de los tamaños de todas las posibles intersecciones de j conjuntos:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| \\
\alpha_2 &= |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-1} \cap A_n| \\
\alpha_3 &= |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \\
&\vdots \\
\alpha_n &= |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|
\end{aligned}$$

En muchas ocasiones, por simplicidad escribiremos la fórmula anterior como

$$\Big|\bigcup_j A_j\Big| = \sum_j |A_j| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \cdots\,,$$

con el sobreentendido de que los puntos suspensivos se rellenan añadiendo la suma de los tamaños de todas las intersecciones tres a tres, luego restando las cuatro a cuatro, etc.

La fórmula anterior traslada el cálculo del tamaño de la unión de n conjuntos al del cálculo de los tamaños de todas las intersecciones que en ella aparecen. En ocasiones nos interesa justamente contar cuántos elementos no están en esa unión. Digamos que $\mathcal{X}$ es un conjunto en el que están incluidos todos los A_j, y que queremos calcular el tamaño del complementario de la unión de los A_j en $\mathcal{X}$. La fórmula correspondiente sería

$$\Big|\mathcal{X} - \bigcup_j A_j\Big| = |\mathcal{X}| - \sum_j |A_j| + \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| - \cdots$$

Obsérvese que los signos van cambiados: ahora, por ejemplo, $\sum_j |A_j|$ lleva signo menos.

Viene al caso reflexionar sobre el uso de este principio[14]. Para poder utilizar la fórmula anterior necesitamos calcular los tamaños de un número enorme, en principio, de intersecciones (concretamente $2^n - 1$, como podrá comprobar el lector trasladando adecuadamente el resultado del ejemplo 2.2.3, y como confirmaremos en la sección 5.1.5). Uno espera que, en las aplicaciones habituales, muchas de esas intersecciones sean vacías, lo que en principio facilitaría el recuento. En cualquier caso, compárese con la regla de la suma, que sólo requería calcular n sumandos.

De manera que si conseguimos partir el conjunto de interés en partes disjuntas, el cálculo es sencillo. Mientras que si no es una verdadera partición, es decir, si hay intersecciones, el uso del principio de inclusión/exclusión es inevitable, y el cálculo, de lo más engorroso.

En muchas ocasiones la forma natural de clasificar el conjunto, la que se nos ocurre de primeras (o quizás la única), no será una verdadera partición. Qué se le va a hacer. Pero incluso en esta situación, como veremos en diversos ejemplos de la sección 5.1.5, sucederá que los conjuntos A_j de la clasificación resultan ser *del mismo tamaño*, y también las intersecciones dos a dos, las tres a tres, etc., lo que nos conducirá a fórmulas relativamente manejables.

Vamos con la demostración del principio de inclusión/exclusión.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 2.3.2. Vamos a probar la fórmula de inclusión/exclusión por inducción. Se trata de una prueba directa, aunque algo aparatosa de notación, y en la que usaremos varias veces las leyes de combinación de uniones e intersecciones, y en particular la ley distributiva que dice que $(A \cup B) \cap C = (A \cap B) \cup (B \cap C)$.

El caso $n = 2$ ya se ha comprobado anteriormente.

Digamos, como hipótesis de inducción, que la fórmula es cierta para un cierto n y consideremos $n + 1$ conjuntos $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$. Separando el último conjunto, y usando el caso $n = 2$, podemos escribir

$$\big|\cup_{j=1}^{n+1} A_j\big| = \big|\big(\cup_{j=1}^{n} A_j\big) \cup A_{n+1}\big| = \big|\cup_{j=1}^{n} A_j\big| + |A_{n+1}| - \big|\big(\cup_{j=1}^{n} A_j\big) \cap A_{n+1}\big|.$$

Al primer término, que es una unión de n conjuntos, se le puede aplicar la hipótesis de inducción, y en el desarrollo correspondiente aparecen todos los tamaños de los A_j hasta n, todas las intersecciones dos a dos entre ellos, etc. El tamaño de A_{n+1} también aparece ya.

[14]Por no hablar de su extraño nombre, que alude probablemente a que generosamente incluimos todos los elementos en las primeras sumas, para luego ir excluyéndolos en las sucesivas intersecciones. Es decir, un principio de mete-saca, idea sobre la que no elaboraremos más allá. Parece ser que apareció por primera vez formalizado en un artículo de Da Silva de 1854, y luego en uno de Sylvester de 1883, aunque ya De Moivre lo usaba sin miramientos allá por el siglo XVIII. Por eso hay quien nombra al principio de marras como fórmula de Da Silva, o fórmula de Sylvester. Hay incluso quien se refiere a él como el *principio de la criba*, aludiendo a las cribas sucesivas del procedimiento. Consulte el lector la famosa *criba de Eratóstenes* en el ejercicio 6.5.24.

Faltarían los términos con las intersecciones en las que aparece el conjunto A_{n+1}. Todos esos aparecen, y con el signo correcto, justamente al reescribir

$$\big|\big(\cup_{j=1}^n A_j\big) \cap A_{n+1}\big| = \big|\cup_{j=1}^n (A_j \cap A_{n+1})\big|$$

y desarrollarlo usando la hipótesis de inducción. Dejamos que el lector propenso a los desarrollos formales compruebe los detalles. ■

Como casi todas las pruebas por inducción, ésta es rápida (y mortal). Y se entiende más bien poco de lo que ocurre. Quizás el lector quiera consultar, en la ya citada sección 5.1.5, una prueba alternativa, mucho mas prolija y parsimoniosa, que remeda la hecha para el caso $n = 2$ por doble recuento. Encontrará también allí las llamadas “desigualdades de Bonferroni”, que permiten comparar la suma alternada del principio de inclusión/exclusión del lema 2.3.2 con versiones truncadas de esa fórmula general (por ejemplo, parando en las intersecciones dos a dos, o en las tres a tres, o. . .), con la correspondiente estimación del error cometido.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 2.3

2.3.1 a) *¿Cuántos números de* tres *dígitos distintos se pueden formar con las cifras* $\{1, 2, \ldots, 9\}$*?*

b) *¿Cuántos de éstos son números pares?*

2.3.2 a) *Queremos ordenar las 27 letras del alfabeto de forma que a y b no aparezcan consecutivamente. ¿De cuántas maneras distintas se podrá hacer?*

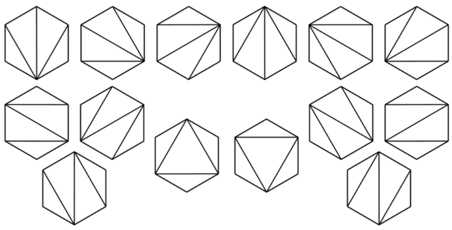
b) *¿Y si además a y c no pueden aparecer consecutivamente?*

2.3.3 *¿Cuántos enteros entre* 1 *y* 10 000 *tienen exactamente un* 8 *y un* 9 *en su expresión decimal?*

2.3.4 *Tenemos eslabones de* n *colores. ¿Cuántos collares distintos – de longitud en principio arbitraria – se pueden fabricar de forma que los eslabones sean de colores distintos?*

2.3.5 *¿Cuántos números naturales tienen en su expresión en base* 10 *todos sus dígitos distintos?*

2.3.6 *Compruébese que* C_n*, el* n*-ésimo número de Catalan, es el número de de formas de triangular (con* n *triángulos) un polígono con* $n+2$ *lados. Aparentemente, éste fue el problema que trató originalmente Eugène Catalan. Las* 14 *triangulaciones del caso* $n = 4$ *(hexágonos) aparecen en la figura:*



2.3.7 *Tenemos un conjunto* $\mathcal{X}$ *y unos subconjuntos suyos* $A_1, \ldots, A_k$*. Pruébese que*

$$\text{a) } |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k| \le \min_{j=1,\ldots,k} |A_j|; \qquad \text{b) } |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k| \ge \sum_{j=1}^{k} |A_j| - (k-1)|\mathcal{X}|\,.$$

2.3.8 *En una batalla*[15] *entre* 100 *combatientes,* 80 *perdieron un brazo,* 85 *una pierna,* 70 *un ojo y* 75 *una oreja. Un número indeterminado* x *perdió las cuatro cosas. Demuéstrese que* $10 \le x \le 70$.

[15] Éste es un ejercicio pergeñado por Lewis Carroll para estimular la ingenua, sana y dulce imaginación de sus lectores infantiles.