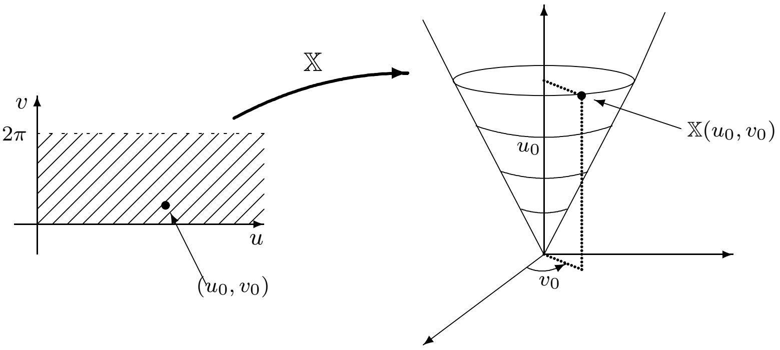
Geometría II
Segundo de Matemáticas
Curso 2004-2005

Hoja 2 (Superficies y primera forma fundamental)

18. Consideremos el cono descrito por $\mathbb{X}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u)$, con $u > 0$ y $0 < v < 2\pi$. Consideremos las curvas $v = u^2 + \alpha$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Hállese la familia de curvas ortogonales.

Nota: lo que sigue es la resolución del ejercicio con todo detalle (más del que es estrictamente "necesario").

La parametrización $\mathbb{X}(u,v)$ es la aplicación que envía la banda que aparece a la izquierda del dibujo en un cono (sin el vértice y al que le quitamos toda una generatriz). Observa que, geométricamente, la coordenada u es, simplemente, la tercera coordenada del punto (la "altura" a la que está), mientras que la coordenada v es un ángulo (medido desde el eje x)[1]. En cuanto fijemos (u_0, v_0), un punto en el plano de parámetros, tenemos identificado un punto del cono ($\mathbb{X}(u_0, v_0)$).



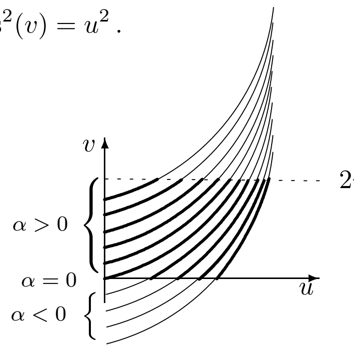
Como vamos a necesitar ángulos entre curvas sobre el cono, calculamos los coeficientes de la primera forma fundamental en esta parametrización. Primero,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{X}_u(u,v) &= (\cos(v), \sin(v), 1)\,, \\
\mathbb{X}_v(u,v) &= (-u\sin(v), u\cos(v), 0)\,.
\end{aligned}
$$

Y entonces

$$
\begin{aligned}
E(u,v) &= <\mathbb{X}_u(u,v), \mathbb{X}_u(u,v)>= \cos^2(v) + \sin^2(v) + 1 = 2\,; \\
F(u,v) &= <\mathbb{X}_u(u,v), \mathbb{X}_v(u,v)>= -u\cos(v)\sin(v) + u\sin(v)\cos(v) = 0\,; \\
G(u,v) &= <\mathbb{X}_v(u,v), \mathbb{X}_v(u,v)>= u^2\sin^2(v) + u^2\cos^2(v) = u^2\,.
\end{aligned}
$$

La familia de curvas que nos dan es $v = u^2 + \alpha$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Obsérvese que, para cada valor de α, tenemos una curva distinta: la formada por los puntos (u,v) tales que $v = u^2 + \alpha$. Estas curvas las podemos ver, o bien en el plano, o bien sobre el cono (y el diccionario de unas a otras es justo la carta $\mathbb{X}$). Dibujémoslas en el plano, donde son, simplemente, parábolas. Por ejemplo, la curva de la familia que pasa por el origen corresponde a $\alpha = 0$. A su derecha aparecen las de $\alpha < 0$, y a su izquierda, las de $\alpha > 0$. Puedes intentar dibujar las imágenes en el cono de esta familia de curvas. Por ejemplo, la que corresponde a $\alpha = 0$ "parte" del vértice del cono y gira una vuelta completa en el cono. Las de $\alpha < 0$ comienzan a una cierta altura y también describen una vuelta completa. Las de $\alpha > 0$ empiezan en el vértice, pero no dan la vuelta completa al cono.



[1] Por cierto, ¿sabrías calcular cuál es el ángulo de apertura de este cono? *Pista*: un poquito de trigonometría, o mirar el ejercicio 11 de esta misma hoja. *Solución*: ángulo $\pi/2$.

Observación clave: si fijamos un punto (u_0, v_0), entonces hay una única curva de la familia que pasa por ese punto (en concreto, la de parámetro $\alpha = v_0 - u_0^2$). Buscamos entonces una curva en el cono que, en cada punto (u_0, v_0), sea perpendicular a la (única) curva de la familia que pasa por ese punto.

Tras todo este análisis preliminar, nos ponemos a calcular. Digamos que la curva buscada está parametrizada (en el plano) como

$$\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}(t) = (u(t), v(t)), \qquad \text{con } t \text{ en cierto intervalo } I,$$

donde $u(t)$ y $v(t)$ son dos funciones que queremos determinar. La correspondiente curva sobre el cono será

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \mathbb{X}(u(t), v(t)), \qquad t \in I.$$

Digamos que la curva $\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}$ está en el punto $\mathbf{q}_0 = (u_0, v_0)$ en tiempo t_0. Es decir, que $u(t_0) = u_0$ y que $v(t_0) = v_0$. Obsérvese que entonces la curva $\boldsymbol{\gamma}$ está en el punto del cono $\mathbf{p}_0 = \mathbb{X}(u_0, v_0) = \mathbb{X}(\mathbf{q}_0)$ en tiempo t_0. La velocidad con la que la curva $\boldsymbol{\gamma}$ pasa por ese punto del cono es

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \mathbb{X}_u(u(t), v(t))\dot{u}(t) + \mathbb{X}_v(u(t), v(t))\dot{v}(t) \quad \Longrightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t_0) = \mathbb{X}_u(\mathbf{p}_0)\dot{u}(t_0) + \mathbb{X}_v(\mathbf{p}_0)\dot{v}(t_0)$$

Ahora seleccionamos la (única) curva de nuestra familia que pasa por el punto $\mathbf{q}_0 = (u_0, v_0)$, cuyo parámetro es, como vimos antes, $\alpha = v_0 - u_0^2$. De las varias maneras de parametrizar esa curva, que llamaremos $\widetilde{\boldsymbol{\delta}}$, elegimos la más natural (tomando como parámetro la primera coordenada):

$$\widetilde{\boldsymbol{\delta}}(u) = (u, u^2 + v_0 - u_0^2)\,.$$

Su correspondiente curva imagen en el cono es

$$\boldsymbol{\delta}(u) = \mathbb{X}(u, u^2 + v_0 - u_0^2)\,.$$

Esta curva, cuando $u = u_0$, está sobre el punto del cono $\mathbf{p}_0 = \mathbb{X}(u_0, v_0)$. Y pasa con velocidad[2]

$$\dot{\boldsymbol{\delta}}(u) = \mathbb{X}_u(u, u^2 + v_0 - u_0^2) + \mathbb{X}_v(u, u^2 + v_0 - u_0^2)2u \quad \Longrightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\delta}}(u_0) = \mathbb{X}_u(\mathbf{p}_0) + \mathbb{X}_v(\mathbf{p}_0)2u_0\,.$$

Para que en el punto $\mathbf{p}_0$ ambas curvas sean perpendiculares (escribiendo ya que $\mathbf{q}_0 = (u_0, v_0) = (u(t_0), v(t_0))$), necesitaremos que

$$\begin{aligned} 0 &= \; < \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t_0), \dot{\boldsymbol{\delta}}(u_0) > \\ &= \; < \mathbb{X}_u(u(t_0), v(t_0))\dot{u}(t_0) + \mathbb{X}_v(u(t_0), v(t_0))\dot{v}(t_0)\,,\, \mathbb{X}_u(u(t_0), v(t_0)) + \mathbb{X}_v(u(t_0), v(t_0))2u(t_0) > \;. \end{aligned}$$

Lo que, escrito en términos de los coeficientes de la segunda forma fundamental, supone que

$$\underbrace{E(u(t_0), v(t_0))}_{=2}\,\dot{u}(t_0) + \underbrace{G(u(t_0), v(t_0))}_{=u(t_0)^2}\,2u(t_0)\dot{v}(t_0) + \underbrace{F(u(t_0), v(t_0))}_{=0}\,[\cdots] = 0$$

Esto es, que

$$\dot{u}(t_0) + u(t_0)^3\,\dot{v}(t_0) = 0\,.$$

Pero, como queremos que esta relación sea cierta para cualquier valor de t, podemos establecer la siguiente relación (una ecuación diferencial) entre las funciones $u(t)$ y $v(t)$:

$$\dot{u}(t) + u(t)^3\,\dot{v}(t) = 0\,.$$

Que se resuelve de manera sencilla:

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) + u(t)^3\,\dot{v}(t) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \dot{u}(t) = -u(t)^3\,\dot{v}(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\dot{u}(t)}{u(t)^3} = -\dot{v}(t) \\ &\Longrightarrow \quad \int \frac{\dot{u}(t)}{u(t)^3}dt = -\int \dot{v}(t)dt \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{u(t)}\Big)^2 = -v(t) + C \\ &\Longrightarrow \quad v(t) = \frac{1}{2u(t)^2} + C'\,. \end{aligned}$$

De manera que la familia de curvas ortogonales a las de la familia $v = u^2 + \alpha$ está formada por aquéllas en las que $v = 1/(2u^2) + C'$, donde C' es una constante.

[2]Nótese que el símbolo " $\dot{}$ " significa derivada con respeto a t en $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)$, y con respecto a u en $\dot{\boldsymbol{\delta}}(u)$.