

Distribuciones más usuales

Notación:

X es la variable aleatoria.

$F(x) = P(X \leq x)$ es la función de distribución.

$f(x)$ es la función de densidad respecto a la medida de Lebesgue.

$\phi(t) = E(e^{itX})$ es la función característica.

Distribuciones discretas

Binomial $B(n, p)$ $n \in \mathbf{N}$ $0 \leq p \leq 1$ $q = 1 - p$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

$$\phi(t) = (q + pe^{it})^n.$$

$$E(X) = np \quad Var(X) = npq.$$

Poisson $P(\lambda)$ $\lambda > 0$.

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad k = 0, 1, \dots, n, \dots$$

$$\phi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

$$E(X) = \lambda \quad Var(X) = \lambda.$$

Hipergeométrica $H(N, n, p)$ $n, N \in \mathbf{N}$ $0 \leq p \leq 1$.

$$P(X = k) = \frac{\binom{Np}{k} \binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad p = M/N.$$

donde k es tal que $\max\{0, M + n - N\} \leq k \leq \min\{M, n\}$.

$$E(X) = np \quad Var(X) = np(1-p) \frac{N-n}{N-1}.$$

Binomial Negativa $BN(m, p)$ $m \in \mathbf{N}$ $0 \leq p \leq 1$ $q = 1 - p$

$$P(X = m + k) = \binom{m+k-1}{k} p^m q^k \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$$

$$\phi(t) = \left(\frac{pe^{it}}{1 - qe^{it}} \right)^m,$$

$$E(X) = \frac{m}{p} \quad Var(X) = \frac{m(1-p)}{p^2}.$$

Distribuciones continuas

Uniforme $U(a, b)$ $a < b$ $a, b \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{b-a} && \text{si } x \in (a, b) \\F(x) &= \frac{x-a}{b-a} && \text{si } x \in (a, b) \\ \phi(t) &= \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)} \\E(X) &= \frac{a+b}{2} && \text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.\end{aligned}$$

Normal $N(\mu, \sigma)$ $\mu \in \mathbf{R}$ $\sigma > 0$

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} && x \in \mathbf{R} \\ \phi(t) &= e^{it\mu} e^{-(\sigma t)^2/2} \\E(X) &= \mu && \text{Var}(X) = \sigma^2.\end{aligned}$$

Gamma $\Gamma(\alpha, \beta)$ $\alpha > 0$ $\beta > 0$

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} && \text{si } x > 0 \\ \phi(t) &= (1 - it\beta)^{-\alpha} \\E(X) &= \alpha\beta && \text{Var}(X) = \alpha\beta^2\end{aligned}$$

Casos particulares:

a) Exponencial $\exp(\lambda) = \Gamma(1, 1/\lambda)$. $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ $x > 0$.

b) Chi-cuadrado de Pearson con n grados de libertad $\chi_n^2 = \Gamma(n/2, 2)$.

Beta $Beta(\alpha, \beta)$ $\alpha > 0$ $\beta > 0$

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} && 0 \leq x \leq 1. \\E(X) &= \frac{\alpha}{\alpha + \beta} && \text{Var}(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}.\end{aligned}$$

Cauchy $C(\theta, \lambda)$ $\theta \in \mathbf{R}$ $\lambda > 0$

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{\pi((x-\theta)^2 + \lambda^2)} && x \in \mathbf{R} && F(x) = \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x-\theta}{\lambda} && x \in \mathbf{R} \\ \phi(t) &= e^{it\theta} e^{-\lambda|t|}\end{aligned}$$

La Esperanza no existe.

Distribuciones multivariantes

Multinomial: $\mathbf{M}(n, p_1, p_2, \dots, p_{m-1})$

$$n \in \mathbf{N}, \quad p_i > 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad p_1 + \dots + p_m = 1$$

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_m = x_m) = \frac{n!}{\prod_{i=1}^m x_i!} \prod_{i=1}^m p_i^{x_i} \quad x_1 + \dots + x_m = n \quad x_i \in \mathbf{N}$$

Nota: La distribución marginal de cada X_i es $B(n, p_i)$

Normal Bivalente: $\mathbf{N}_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$

$$\mu_1, \mu_2 \in \mathbf{R}, \quad \sigma_1, \sigma_2 > 0, \quad -1 < \rho < 1$$

Definición 1

Se dice que un vector aleatorio (X, Y) sigue una distribución Normal bivalente no degenerada, de parámetros $(\mu_1, \sigma_1, \alpha, \beta, \sigma)$ si:

- 1- X sigue una distribución $N(\mu_1, \sigma_1)$.
- 2- $Y/X = x$ sigue una distribución $N(\alpha x + \beta, \sigma)$

Propiedades:

- 1- $E(Y) = \mu_2 = \alpha\mu_1 + \beta$
- 2- $Var(Y) = \sigma_2^2 = \sigma^2 + \alpha\sigma_1^2$
- 3- $Cov(X, Y) = \alpha\sigma_1^2 \quad Coef.Corr(X, Y) = \rho = \alpha \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$
- 4- Y sigue una distribución $N(\mu_2, \sigma_2)$.
- 5- $X/Y = y$ sigue una distribución $N(\delta y + \gamma, \hat{\sigma})$, donde:
 $\delta = \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \quad \gamma = \mu_1 - \delta\mu_2 \quad \hat{\sigma} = \sigma_1^2(1 - \rho^2)$

Definición 2

Se dice que un vector aleatorio (X, Y) sigue una distribución Normal bivalente no degenerada, de parámetros $(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$ si su función de densidad conjunta $f(x, y)$ es:

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}(\sigma_2^2(x-\mu_1)^2 + \sigma_1^2(y-\mu_2)^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2))\right\}$$

para todo $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Esta definición es equivalente a la anterior y, por tanto, se cumplen las mismas propiedades (marginales y condicionadas con distribución Normal, relaciones entre los parámetros como arriba.)