TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA TEORIA LOCAL DE CURVAS. *Dadas las funciones diferenciables* $k(s) > 0$ *y* $\tau(s)$, $s \in I$, *existe una curva parametrizada regular* $\alpha: I \to R^3$ *tal que* s *es la longitud de arco,* $k(s)$ *es la curvatura, y* $\tau(s)$ *es la torsión de* α. *Además, cualquier otra curva* $\bar{\alpha}$, *satisfaciendo las mismas condiciones difiere de* α *en un movimiento rígido; esto es, existe una aplicación lineal ortogonal* ρ *de* R^3, *con determinante positivo, y un vector* c *tal que* $\bar{\alpha} = \rho + c$.

El enunciado de arriba es cierto. Una demostración completa involucra el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias y será expuesta en el apéndice al capítulo 4. Una demostración de la unicidad —salvo un movimiento— de curvas que tienen los mismos s, $k(s)$ y $\tau(s)$ es, sin embargo, simple y puede desarrollarse ahora.

Demostración de la parte de unicidad del teorema fundamental. Primero observemos que la longitud de arco, curvatura y torsión son invariantes bajo movimientos rígidos; eso significa que, por ejemplo, si $M: R^3 \to R^3$ es un movimiento rígido y $\alpha = \alpha(t)$ es una curva parametrizada, entonces

$$\int_a^b \left|\frac{d\alpha}{dt}\right| dt = \int_a^b \left|\frac{d(M \circ \alpha)}{dt}\right| dt.$$

Eso es plausible, puesto que estos conceptos se definen por medio de productos interiores o vectoriales de ciertas derivadas (las derivadas son invariantes bajo traslaciones y los productos interior y vectorial se expresan por medio de longitudes y ángulos entre vectores, así también son invariantes bajo movimientos rígidos). Una comprobación cuidadosa puede dejarse como ejercicio (ver el Ejercicio 6).

Ahora, supongamos que dos curvas $\alpha = \alpha(s)$ y $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(s)$ satisfacen las condiciones $k(s) = \bar{k}(s)$ y $\bar{\tau}(s) = \tau(s)$, $s \in I$. Sean t_0, n_0, b_0 y $\bar{t}_0$, $\bar{n}_0$, $\bar{b}_0$ los triedros de Frenet en $s = s_0 \in I$ de α y $\bar{\alpha}$, respectivamente. Claramente, existe un movimiento rígido que lleva $\bar{\alpha}(s_0)$ en $\alpha(s_0)$ y $\bar{t}_0$, $\bar{n}_0$, $\bar{b}_0$ en t_0, n_0, b_0. Así, tras efectuar este movimiento rígido

sobre $\bar{\alpha}$, tenemos que $\bar{\alpha}(s_0) = \alpha(s_0)$ y que los triedros de Frenet $t(s)$, $n(s)$, $b(s)$ y $\bar{t}(s)$, $\bar{n}(s)$, $\bar{b}(s)$ de α y $\bar{\alpha}$, respectivamente, satisfacen las ecuaciones de Frenet

$$\frac{dt}{ds} = kn \qquad \frac{d\bar{t}}{ds} = k\bar{n}$$

$$\frac{dn}{ds} = -kt - \tau b \qquad \frac{d\bar{n}}{ds} = -kt - \tau b$$

$$\frac{db}{ds} = \tau n \qquad \frac{d\bar{b}}{ds} = \tau\bar{n},$$

con $t(s_0) = \bar{t}(s_0)$, $n(s_0) = \bar{n}(s_0)$, $b(s_0) = \bar{b}(s_0)$.

Ahora observamos, usando las ecuaciones de Frenet, que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\{|t - \bar{t}|^2 + |n - \bar{n}|^2 + |b - \bar{b}|^2\} \\
&= \langle t - \bar{t}, t' - \bar{t}'\rangle + \langle b - \bar{b}, b' - \bar{b}'\rangle + \langle n - \bar{n}, n' - \bar{n}'\rangle \\
&= k\langle t - \bar{t}, n - \bar{n}\rangle + \tau\langle b - \bar{b}, n - \bar{n}\rangle - k\langle n - \bar{n}, t - \bar{t}\rangle - \tau\langle n - \bar{n}, b - \bar{b}\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

para todo $s \in I$. Por tanto, la expresión de arriba es constante, y, puesto que es cero para $s = s_0$, es idénticamente cero. Se sigue que $t(s) = \bar{t}(s)$, $n(s) = \bar{n}(s)$, $b(s) = \bar{b}(s)$ para todo $s \in I$. Ya que

$$\frac{d\alpha}{ds} = t = \bar{t} = \frac{d\bar{\alpha}}{ds},$$

obtenemos $(d/ds)(\alpha - \bar{\alpha}) = 0$. Así, $\alpha(s) = \bar{\alpha}(s) + a$, donde a es un vector constante. Como $\alpha(s_0) = \bar{\alpha}(s_0)$, tenemos $a = 0$; de aquí, $\alpha(s) = \bar{\alpha}(s)$ para todo $s \in I$.

Q.E.D.*

Apéndice
DEMOSTRACIONES DE LOS TEOREMAS FUNDAMENTALES DE LA TEORIA LOCAL DE CURVAS Y SUPERFICIES

En este apéndice demostraremos cómo pueden obtenerse los teoremas fundamentales de existencia y unicidad para curvas y superficies (secs. 1.5 y 4.2), a partir de teoremas de la teoría de ecuaciones diferenciales.

Demostración del teorema fundamental de la teoría local de curvas (cf. el enunciado en la sec. 1.5). El punto de partida consiste en observar que las ecuaciones de Frenet

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= kn, \\ \frac{dn}{ds} &= -kt - \tau b, \\ \frac{db}{ds} &= \tau n \end{aligned} \tag{1}$$

pueden considerarse como un sistema diferencial en $I \times R^9$,

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{ds} &= f_1(s, \xi_1, \ldots, \xi_9) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \frac{d\xi_9}{ds} &= f_9(s, \xi_1, \ldots, \xi_9) \end{aligned}\right\}, \qquad s \in I, \tag{1a}$$

donde $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = t$, $(\xi_4, \xi_5, \xi_6) = n$, $(\xi_7, \xi_8, \xi_9) = b$ y las f_i, $i = 1, \ldots, 9$, son funciones lineales (con coeficientes que dependen de s) de las coordenadas ξ_i.

En general, un sistema diferencial del tipo (1a) no puede asociarse a un campo vectorial «estacionario» (como en la sec. 3.4). En cualquier caso, se cumple un teorema de existencia y unicidad que puede enunciarse en los siguientes términos:

Dadas las condiciones iniciales $s_0 \in I$, $(\xi_1)_0, \ldots, (\xi_9)_0$, *existe un intervalo abierto* $J \subset I$, *que contiene a* s_0, *y una única aplicación diferenciable* $\alpha: J \to R^9$, *con*

$$\alpha(s_0) = ((\xi_1)_0, \ldots, (\xi_9)_0) \quad y \quad \alpha'(s) = (f_1, \ldots, f_9),$$

donde cada f_i, $i = 1, \ldots, 9$, *está evaluada en* $(s, \alpha(s)) \in J \times R^9$. *Además, si el sistema es lineal,* $J = I$ (cf. S. Lang, *Analysis* I, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1968, pp. 383-386).

Se deduce entonces que, dado un triedro ortonormal y orientado positivamente $\{t_0, n_0, b_0\}$ en R^3, y un valor $s_0 \in I$, existe una familia de triedros $\{t(s), n(s), b(s)\}$, $s \in I$, con $t(s_0) = t_0$, $n(s_0) = n_0$, $b(s_0) = b_0$.

Primero demostraremos que la familia $\{t(s), n(s), b(s)\}$, obtenida por este procedimiento, es ortonormal para cada $s \in I$. En efecto, utilizando el sistema (1) para expresar las derivadas con respecto a s de las seis cantidades

$$\langle t, n\rangle, \quad \langle t, b\rangle, \quad \langle n, b\rangle, \quad \langle t, t\rangle, \quad \langle n, n\rangle, \quad \langle b, b\rangle$$

como funciones de estas mismas cantidades, obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d}{ds}\langle t, n\rangle = k\langle n, n\rangle - k\langle t, t\rangle - \tau\langle t, b\rangle,$$

$$\frac{d}{ds}\langle t, b\rangle = k\langle n, b\rangle + \tau\langle t, n\rangle,$$

$$\frac{d}{ds}\langle n, b\rangle = -k\langle t, b\rangle - \tau\langle b, b\rangle + \tau\langle n, n\rangle,$$

$$\frac{d}{ds}\langle t, t\rangle = 2k\langle t, n\rangle,$$

$$\frac{d}{ds}\langle n, n\rangle = -2k\langle n, t\rangle - 2\tau\langle n, b\rangle,$$

$$\frac{d}{ds}\langle b, b\rangle = 2\tau\langle b, n\rangle.$$

Se comprueba fácilmente que

$$\langle t, n\rangle \equiv 0, \qquad \langle t, b\rangle \equiv 0, \qquad \langle n, b\rangle \equiv 0,$$

$$t^2 \equiv 1, n^2 \equiv 1, b^2 \equiv 1,$$

es una solución del sistema precedente, bajo las condiciones iniciales 0, 0, 0, 1, 1, 1. En virtud a la unicidad, la familia $\{t(s), n(s), b(s)\}$ es ortonormal para cada $s \in I$, como habíamos afirmado.

A partir de la familia $\{t(s), n(s), b(s)\}$ es posible obtener una curva definiendo

$$\alpha(s) = \int t(s)\, ds, \qquad s \in I,$$

donde entendemos por la integral de un vector la función vectorial que se obtiene integrando cada una de las componentes. Es claro que $\alpha'(s) = t(s)$ y que $\alpha''(s) = kn$. Por lo tanto, $k(s)$ es la curvatura de α en s. Además, como

$$\alpha'''(s) = k'n + kn' = k'n - k^2t - k\tau b,$$

la torsión de α vendrá dada por (cf. el ejercicio 12, sec. 1.5)

$$-\frac{\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle}{k^2} = -\frac{\langle t \wedge kn, (-k^2t + k'n - k\tau b) \rangle}{k^2} = \tau;$$

en consecuencia, α es la curva que se buscaba.

Todavía tenemos que demostrar que α es única salvo traslaciones y rotaciones en R^3. Sea $\bar{\alpha}$: $I \to R^3$ otra curva con $\bar{k}(s) = k(s)$ y $\bar{\tau}(s) = \tau(s)$, $s \in I$, y, sea $\{\bar{t}_0, \bar{n}_0, \bar{b}_0\}$ el triedro de Frenet de $\bar{\alpha}$ en s_0. Resulta claro que es posible hacer coincidir, tras efectuar una traslación A y una rotación ρ, el triedro $\{\bar{t}_0, \bar{n}_0, \bar{b}_0\}$ con el triedro $\{t_0, n_0, b_0\}$ (ambos triedros son positivos). Basta aplicar la parte de unicidad del teorema precedente sobre ecuaciones diferenciales para obtener el resultado buscado.

Q.E.D.