

Varias variables aleatorias

Queremos analizar varias variables aleatorias $X_1, \dots, X_n$ conjuntamente.

Conocemos las propiedades de cada variable X_j (función de densidad o de masa, medias, varianzas, etc.). Pero con esto no basta. Para completar el modelo necesitamos la función de densidad/masa “conjunta”.

Esquema formal: dados Ω y $\mathbf{P}$, consideramos variables

$$X_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$X_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\vdots$$

$$X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Lo ilustraremos todo con el caso de **dos** variables.

Ejemplo 1. Lanzamos 2 veces el dado. $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 6)\}$.
 Probabilidad: $1/36$ para cada resultado.

Consideramos $X =$ resultado del dado 1 e $Y =$ resultado del dado 2.
 Cada variable toma los valores $\{1, 2, \dots, 6\}$ con probabilidades $1/6$.

Pero, ¿conjuntamente? ¿Cuánto vale $\mathbf{P}(X = 3, Y = 2)$?

		1	2	3	4	5	6	X
Y	1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	$\rightarrow 1/6$
	2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	$\rightarrow 1/6$
	3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	$\rightarrow 1/6$
	4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	$\rightarrow 1/6$
	5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	$\rightarrow 1/6$
	6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	$\rightarrow 1/6$
		↓	↓	↓	↓	↓	↓	
		1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	

Ejemplo 2. Lanzamos 2 veces el dado. $\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (6,6)\}$.
 Probabilidad: $1/36$ para cada resultado.

Consideramos $X = \text{máximo de los dos dados}$ e
 $Y = \text{mínimo de los dos dados}$. Cada variable toma los valores
 $\{1, 2, \dots, 6\}$, pero no con igual probabilidad. Por ejemplo,
 $\mathbf{P}(X = 1) = 1/36$, y $\mathbf{P}(Y = 1) = 11/36$.

¿Conjuntamente? ¿Cuánto vale $\mathbf{P}(X = 3, Y = 2)$?

		1	2	3	4	5	6	X
Y	1	1/36	2/36	2/36	2/36	2/36	2/36	→ 11/36
	2	0	1/36	2/36	2/36	2/36	2/36	→ 9/36
	3	0	0	1/36	2/36	2/36	2/36	→ 7/36
	4	0	0	0	1/36	2/36	2/36	→ 5/36
	5	0	0	0	0	1/36	2/36	→ 3/36
	6	0	0	0	0	0	1/36	→ 1/36
		↓	↓	↓	↓	↓	↓	
		1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36	

Dos variables discretas

Dos variables aleatorias, X e Y toman valores $x_1, \dots, x_n$ e $y_1, \dots, y_m$, respectivamente, con ciertas probabilidades.

Interesa considerarlas conjuntamente, como un “vector” aleatorio (X, Y) . Debemos prescribir las **probabilidades conjuntas** $\mathbf{P}(X = x_j, Y = y_k)$ recogidas en la tabla siguiente:

	x_1	x_2	$\dots$	x_n	
y_1			$\dots$		$\rightarrow \mathbf{P}(Y = y_1)$
y_2		$\mathbf{P}(X = x_2, Y = y_2)$	$\dots$		$\rightarrow \mathbf{P}(Y = y_2)$
$\vdots$			$\ddots$		
y_m			$\dots$		$\rightarrow \mathbf{P}(Y = y_m)$
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\dots$	$\downarrow$	
	$\mathbf{P}(X = x_1)$	$\mathbf{P}(X = x_2)$	$\dots$	$\mathbf{P}(X = x_n)$	

Estos números $\mathbf{P}(X = x_j, Y = y_k)$ deben ser no negativos, y su suma (la suma de todas las entradas de la tabla) debe ser 1.

Sumando por filas y por columnas obtenemos las **marginales** de X e Y :

$$\mathbf{P}(X = x_j) = \sum_{k=1}^m \mathbf{P}(X = x_j, Y = y_k)$$
$$\mathbf{P}(Y = y_k) = \sum_{j=1}^n \mathbf{P}(X = x_j, Y = y_k)$$

En general, esta información “marginal” no basta para recuperar la tabla.

Si X e Y son **independientes**, entonces las probabilidades conjuntas se obtienen **multiplicando** las marginales correspondientes:

$$\mathbf{P}(X = x_j, Y = y_k) = \mathbf{P}(X = x_j)\mathbf{P}(Y = y_k).$$

Cálculo de probabilidades

Las variables X e Y toman valores

$$\text{val}(X) = \{x_1, \dots, x_n\} \quad \text{y} \quad \text{val}(Y) = \{y_1, \dots, y_m\}.$$

Disponemos de la tabla de probabilidades conjuntas.

Para cualesquiera $A \subset \text{val}(X)$ y $B \subset \text{val}(Y)$,

$$\mathbf{P}(X \in A, Y \in B) = \sum_{j: x_j \in A} \sum_{k: y_k \in B} \mathbf{P}(X = x_j, Y = y_k)$$

Si tenemos una variable aleatoria $Z = h(X, Y)$, donde h es cierta función, su media se calcula

$$\mathbf{E}(h(X, Y)) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m h(x_j, y_k) \mathbf{P}(X = x_j, Y = y_k).$$

Casos especiales:

$$\begin{aligned}\boxed{\mathbf{E}(X + Y)} &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m (x_j + y_k) \mathbf{P}(X = x_j, Y = y_k) \\&= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m x_j \mathbf{P}(X = x_j, Y = y_k) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m y_k \mathbf{P}(X = x_j, Y = y_k) \\&= \sum_{j=1}^n x_j \sum_{k=1}^m \mathbf{P}(X = x_j, Y = y_k) + \sum_{k=1}^m y_k \sum_{j=1}^n \mathbf{P}(X = x_j, Y = y_k) \\&= \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{P}(X = x_j) + \sum_{k=1}^m y_k \mathbf{P}(Y = y_k) = \boxed{\mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y)}\end{aligned}$$

Esto ocurre siempre, sin necesidad de hipótesis adicionales (como independencia, etc.).

$$\mathbf{E}(X \cdot Y) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m x_j \cdot y_k \mathbf{P}(X = x_j, Y = y_k)$$

¿Cómo “separar”? En general, $\mathbf{E}(X \cdot Y) \neq \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y)$.

Aunque si X e Y independientes:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X \cdot Y) &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m x_j \cdot y_k \mathbf{P}(X = x_j, Y = y_k) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m x_j \cdot y_k \mathbf{P}(X = x_j) \cdot \mathbf{P}(Y = y_k) \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \cdot \mathbf{P}(X = x_j) \sum_{k=1}^m y_k \cdot \mathbf{P}(Y = y_k) = \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y). \end{aligned}$$

Covarianza

Definimos:

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}(X)) \cdot (Y - \mathbf{E}(Y))].$$

Significado:

- si $\text{cov}(X, Y) > 0$, entonces valores “grandes” de X tienden a corresponderse con valores “grandes” de Y (y “pequeños” con “pequeños”).
- si $\text{cov}(X, Y) < 0$, entonces valores “grandes” de X tienden a corresponderse con valores “pequeños” de Y (y “pequeños” con “grandes”).

Para calcular: $\text{cov}(X, Y) = \mathbf{E}(X \cdot Y) - \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y)$.

Correlación

Versión adimensional: la **correlación**:

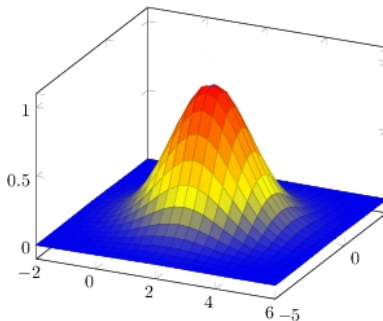
$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbf{V}(X) \cdot \mathbf{V}(Y)}}$$

- Está entre -1 y $+1$.
- Si $\rho(X, Y) = \pm 1$, entonces X es transformación lineal de Y .
- Si X e Y independientes, entonces $\rho(X, Y) = 0$.
- **Pero no al revés, en general.**

Dos varias variables continuas

El par (X, Y) tiene una **función de densidad conjunta** $f_{X,Y}(x, y)$:

$$f_{X,Y}(x, y) \geq 0 \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx dy = 1$$



Dos varias variables continuas

Las **marginales** se obtienen integrando en una de las variables:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy \quad \text{y} \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx$$

X e Y son **independientes** si (y solo si) la función de densidad se factoriza:

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y).$$

Cálculo de probabilidades

Digamos que las variables X e Y tienen función de densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y)$$

Para cualesquiera $A, B \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{P}(X \in A, Y \in B) = \int_A \int_B f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy$$

$$\mathbf{E}(h(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

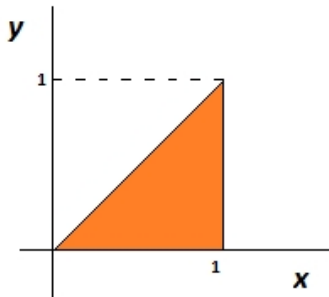
La covarianza y la correlación se definen como antes, solo que se calculan con integrales:

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= \mathbf{E}(X \cdot Y) - \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y f_{X,Y}(x, y) dx dy - \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y). \end{aligned}$$

Un ejemplo

(X, Y) tiene función de densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 < y < x < 1, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$



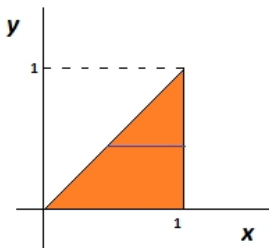
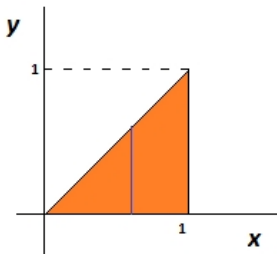
Es **función de densidad**, pues es no negativa y su volumen es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy = \int_0^1 \left(\int_0^x 2 dy \right) dx = \int_0^1 2x dx = 2 \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 = 1,$$

si es que integramos en “verticales”; o bien

$$[\dots] = \int_0^1 \left(\int_y^1 2 dx \right) dy = \int_0^1 2(1-y) dy = 2 \left(y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 1,$$

integrando en “horizontales”.



Marginales:

Para $x \in [0, 1]$,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy = \int_0^x 2 dy = 2y \Big|_0^x = 2x$$

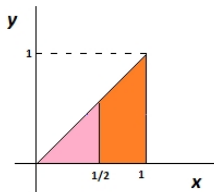
Para $y \in [0, 1]$,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx = \int_y^1 2 dx = 2x \Big|_y^1 = 2(1 - y).$$

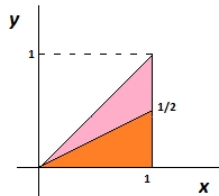
Las variables X e Y no son independientes.

Cálculo de probabilidades:

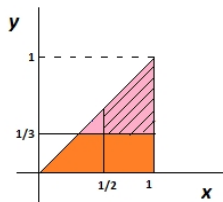
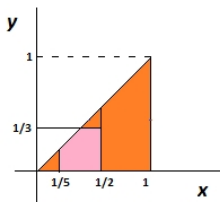
$$P(X \leq 1/2)$$



$$P(X \leq 2Y)$$



$$P(X \in [1/5, 1/2], Y \leq 1/3) \quad P(X \geq 1/2 | Y \geq 1/3)$$



Medias:

$$\mathbf{E}(X) = \int_0^1 x \cdot (2x) dx = \frac{2}{3}$$

$$\mathbf{E}(Y) = \int_0^1 y \cdot (2(1-y)) dy = 2 \int_0^1 y dy - 2 \int_0^1 y^2 dy = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbf{E}(X \cdot Y) = \int_0^1 \left(\int_0^x x \cdot y \cdot 2 dy \right) dx = 2 \int_0^1 x \left(\int_0^x y dy \right) dx = 2 \int_0^1 \frac{x^3}{2} dx = \frac{1}{4}$$

$$\text{¿} \text{cov}(X, Y) \text{ ?}$$

$$\text{¿} \rho(X, Y) \text{ ?}$$

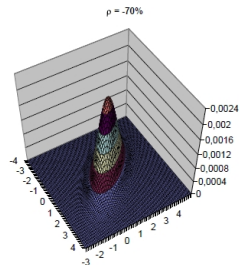
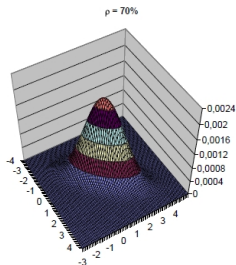
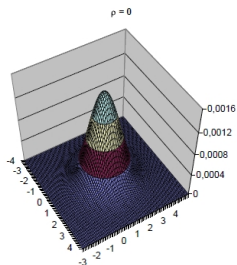
La normal bidimensional

El par (X, Y) sigue una normal bidimensional **estándar** si

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\right)$$

Hay un único parámetro, $-1 \leq \rho \leq 1$.

- X e Y son $\mathcal{N}(0, 1)$;
- la correlación entre X e Y es justamente ρ ;
- $\rho = 0$ si y solo si X e Y independientes.



El par de variables (X, Y) sigue una normal bidimensional si

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]\right)$$

Cinco parámetros: $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$, $-1 \leq \rho \leq 1$.

Ahora

- X es $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$; Y es $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$;
- el parámetro ρ es, de nuevo, la correlación entre X e Y .
- De nuevo, correlación cero es lo mismo que independencia.