Variables aleatorias continuas

Función de densidad de una variable continua X, $f_X(x)$:

$$f_X(x) \geq 0\,, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1.$$

Cálculo de probabilidades:

$$\mathbf{P}(X \in [a,b]) = \int_a^b f_X(x)\,dx.$$

(áreas).

Esperanzas

Media de X:

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx$$

Media de $Y = h(X)$:

$$\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cdot f_X(x)\,dx$$

Varianza de X:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X) &= \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^2) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x)\,dx - \Big(\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx\Big)^2\end{aligned}$$

Función de distribución

Dada una variable X (discreta o continua), definimos su **función de distribución** como

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x) \qquad \text{para cada } x \in \mathbb{R}.$$

¿Cómo se calcula?

- Si X toma valores $x_1, x_2, \ldots$ con probabilidades $p_1, p_2, \ldots$, entonces, dado $x \in \mathbb{R}$,
$$F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x) = \sum_{j : x_j \leq x} p_j.$$
- Si es continua,
$$F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\, dy.$$

Algunos modelos (discretos) básicos

En general, una variable discreta está definida por una lista de valores

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

(aquí, n podría ser ∞), con sus respectivas probabilidades

$$p_1, p_2, \ldots, p_n\,, \qquad \text{con} \quad p_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n} p_j = 1$$

Las medias y varianzas se calculan

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i\,, \quad \mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i\Big)^2.$$

Solo en unos pocos casos obtendremos “fórmulas” manejables.

Variable Bernoulli

La variable X sigue una $\mathrm{BER}(p)$, para cierto $0 < p < 1$ si

$$X = \begin{cases} 0, & \text{con probabilidad } 1-p; \\ 1, & \text{con probabilidad } p. \end{cases}$$

- Modela el lanzamiento de una moneda ($1 =$cara);
- p es conocida como "probabilidad de éxito".

Media $\mathbf{E}(X) = p$. Varianza $\mathbf{V}(X) = p(1-p)$.

EJERCICIO. X toma valor $+1$ con probabilidad p y -1 con probabilidad $1-p$.

Variable uniforme (discreta)

La variable X sigue una $\textsc{unif}(\{1, \dots, n\})$ si toma los valores $\{1, \dots, n\}$ todos con igual probabilidad, $\mathbf{P}(X = j) = 1/n$.

Media:

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{n}\,\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

Varianza:

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2.$$

Necesitamos

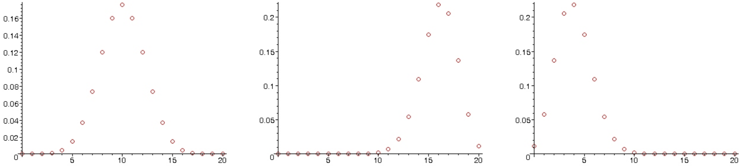
$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Variable binomial

La variable X sigue una $\text{BIN}(n, p)$, para $n \geq 1$ y cierto $0 < p < 1$ si X toma los valores $0, 1, 2, \ldots, n$ con probabilidades

$$\mathbf{P}(X = j) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \qquad \text{para cada } j = 1, 2, \ldots, n.$$

- Modela el lanzamiento de n monedas idénticas (probabilidad p de cara), "independientemente", cuando interesa registrar el número de caras obtenidas;
- n es el número de lanzamientos, p es probabilidad de éxito en cada.



Media $\mathbf{E}(X) = np$.

Varianza $\mathbf{V}(X) = n\,p(1-p)$.

Observación: si X es $\mathrm{BIN}(n,p)$, entonces

$$X = X_1 + \cdots + X_n,$$

donde $X_1, \ldots X_n$ son $\mathrm{BER}(p)$ “independientes”.

Variable geométrica

La variable X sigue una $\textsc{geom}(p)$, para cierto $0 < p < 1$, si X toma los valores $1, 2, \ldots$ con probabilidades

$$\mathbf{P}(X = j) = p\,(1-p)^{j-1} \qquad \text{para cada } j = 1, 2, \ldots$$

- Modela el lanzamiento de monedas idénticas (probabilidad p de cara) hasta que sale la primera cara. La variable registra el momento (lanzamiento) en el que aparece esa primera cara.

Media $\mathbf{E}(X) = 1/p$.

Varianza $\mathbf{V}(X) = (1-p)/p^2$.

Variable Poisson

La variable X sigue una $\textsc{pois}(\lambda)$, para cierto $\lambda > 0$, si X toma los valores $0, 1, 2, \ldots$ con probabilidades

$$\mathbf{P}(X = j) = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^j}{j!} \qquad \text{para cada } j = 0, 1, 2, \ldots$$

Media $\mathbf{E}(X) = \lambda$. Varianza $\mathbf{V}(X) = \lambda$.

- ¿Qué modela?
- Si n grande, p pequeño, y llamamos $np = \lambda$, entonces

$$\mathbf{P}(\textsc{bin}(n, p) = j) \approx \mathbf{P}(\textsc{pois}(\lambda) = j).$$

Algunos modelos (continuos) básicos

Solo en algunos casos, cuando la función de densidad de una variable continua X tenga una determinada expresión, obtendremos fórmulas manejables para $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{V}(X)$, etc.

Variable uniforme

La variable X sigue una $\textsc{unif}([0,1])$ si

$$f_X(x) = 1 \qquad \text{para } x \in [0,1]$$

(y vale 0 en el resto).

Media $\mathbf{E}(X) = 1/2$. Varianza $\mathbf{V}(X) = 1/12$.

Función de distribución: $F_X(x) = x$ para $x \in [0,1]$, $F_X(x) = 0$ si $x < 0$, $F_X(x) = 1$ si $x > 1$.

Ejercicio: variable uniforme en el intervalo $[a, b]$.

Variable exponencial

La variable X sigue una $\text{EXP}(\lambda)$, para $\lambda > 0$, si

$$f_X(x) = \lambda\, e^{-\lambda x} \qquad \text{para } x \geq 0$$

(y vale 0 si $x < 0$).

Función de distribución: $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda\, x}$, si $x \geq 0$ (y vale 0 si $x < 0$).

Media $\mathbf{E}(X) = 1/\lambda$.

Varianza $\mathbf{V}(X) = 1/\lambda^2$.

Variable normal estándar

La variable X sigue una $\mathcal{N}(0,1)$ si

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}.$$

Función de distribución:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}\, dy.$$

(en excel, `distr.norm.estand(x)`).

Media $\mathbf{E}(X) = 0$.

Varianza $\mathbf{V}(X) = 1$.

Variable normal

La variable X sigue una $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ si

$$\phi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}.$$

Media $\mathbf{E}(X) = \mu$.

Varianza $\mathbf{V}(X) = \sigma^2$.

Observación: si X sigue una $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, entonces

$$X = \mu + \sigma\, Y\,,$$

donde Y sigue una $\mathcal{N}(0, 1)$.