Lo imposible y la Ciencia abstracta

Pablo Fernández Gallardo y José Luis Fernández Pérez[1]

Decía San Agustín:

> El buen cristiano deberá guardarse de los matemáticos y de todos aquellos que practican la predicción sacrílega, particularmente cuando proclaman la verdad. Porque existe el peligro de que esta gente, aliada con el diablo, pueda cegar las almas de los hombres y atraparlos en las redes del infierno. [2]

El lector, entre atrevido y curioso, que desoiga el *caveat* del de Hipona no encontrará en estas páginas una visión imparcial, sino al contrario, una apasionada aproximación a la belleza y a la potencia de la Matemática como lenguaje de la Ciencia y como *Ciencia abstracta*.

Suena paradójico: una Ciencia que se ocupa de realidades abstractas y que permite entender las realidades concretas... ¡vaya! Un lenguaje, el de las Matemáticas, que se adapta especialmente bien, y éste será el hilo conductor de esta nota, al tratamiento de *lo imposible*, de lo que no se puede hacer, al establecimiento de límites que no se pueden traspasar. Y así, moviéndonos en un mundo poblado por objetos y relaciones ideales, podremos poner límites a cuestiones tan mundanas como la calidad de los mapas, la bondad de los sistemas electorales, la capacidad del razonamiento lógico para estructurar el conocimiento o la capacidad de comunicación digital.

La fascinación de las Matemáticas

> Digno de admiración es el número Pi
> *tres coma catorce*.
> Todas sus siguientes cifras también son iniciales,
> *quince noventa y dos* porque nunca termina.
> No se deja abarcar *sesenta y cinco treinta y cinco* con la mirada,
> *ochenta y nueve* con los cálculos
> *setenta y nueve* con la imaginación
> y ni siquiera *treinta y dos treinta y ocho* con una broma o sea
> comparación
> *cuarenta y seis* con nada

---

[1] Pablo Fernández Gallardo, pablo.fernandez@uam.es, Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid. Campus de Cantoblanco s/n, 28049, Madrid. José Luis Fernández Pérez, joseluis.fernandez@uam.es. Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid. Campus de Cantoblanco s/n, 28049, Madrid. Este texto tiene su origen en la conferencia que fue dictada por el segundo autor a modo de lección inaugural del curso académico 2001-2002 en la Universidad Autónoma de Madrid.

[2] *De genesi ad litteram* 2, XVII, 37.

veintiséis cuarenta y tres en el mundo.
La serpiente más larga de la tierra después de muchos metros se acaba.
Lo mismo hacen aunque un poco después las serpientes de las fábulas.
La comparsa de cifras que forma el número Pi
no se detiene en el borde de la hoja,
es capaz de continuar por la mesa, el aire,
la pared, la hoja de un árbol, un nido, las nubes, y así hasta el cielo,
a través de toda esa hinchazón e inconmensurabilidad celestiales.
Oh, qué corto, francamente rabicorto es el cometa.
¡En cualquier espacio se curva el débil rayo de una estrella!
Y aquí *dos treinta y uno cincuenta y tres diecinueve*
mi número de teléfono el número de tus zapatos
el año mil novecientos setenta y tres piso sexto
el número de habitantes sesenta y cinco céntimos
centímetros de cadera dos dedos charada y mensaje cifrado,
en la cual *ruiseñor que vas a Francia*
y *se ruega mantener la calma*
y también *pasarán la tierra y el cielo*,
pero no el número Pi, de eso ni hablar,
seguirá sin cesar con un *cinco* en bastante buen estado,
y un *ocho*, pero nunca uno cualquiera,
y un *siete* que nunca será el último,
y metiéndole prisa, eso sí metiéndole prisa a la perezosa eternidad
para que continúe.[3]

Cómo no maravillarse, como hacía la poetisa polaca Szymborska, ante los secretos casi insondables de las cifras decimales de Pi. Cómo no admirarse ante la posibilidad de que ese alarde infinito de números pueda esconder todos los volúmenes, los escritos y los que están por ser escritos, en una suerte de Biblioteca Universal. El número Pi, la razón de la circunferencia de un círculo a su diámetro, ¿cómo?, ¿por qué?, aparece por todos los rincones de las Matemáticas, explicando de forma misteriosa ritmo, forma, azar, flujos, movimiento.

La Matemática fascina por la elegancia de sus argumentos, por la belleza de su edificio conceptual, por la unidad profunda que liga todos sus objetos y métodos. Hechiza por la libertad de planteamientos que permite, por el permanente "qué pasaría si...", al que en ocasiones, por cierto, no conviene sucumbir. Y asombra por su utilidad en la descripción de las demás Ciencias, tal como declaraba, perplejo, el físico y premio Nobel Wigner[4], por esa corroboración permanente de que el libro de la Naturaleza está escrito en Matemáticas, que nos enseñaba Galileo[5].

[3] Wislawa Szymborska: "El número Pi", del libro *El gran número, fin y principio y otros.* Editorial Hiperión, Madrid, 1997.
[4] Eugene Wigner: "The unreasonable effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences". *Communications in Pure and Applied Mathematics*, volumen 13 (1960).
[5] Galileo Galilei: *El ensayador.* Aguilar, Buenos Aires, 1981.

La Matemática y los matemáticos

Hablar de y sobre la Matemática, la Ciencia abstracta, no es tarea fácil: el manejo del lenguaje matemático requiere una precisión y una disciplina que a menudo suelen crear cierto rechazo. Quizás es por eso por lo que, en una imagen muy habitual, la Matemática es vista simplemente como un compendio de reglas de cálculo que se aplican en situaciones estereotipadas; ¿y los matemáticos?, apenas gente hábil con los números y las fórmulas. Lichtenberg, catedrático de Física en Gotinga, en el siglo XVIII, conocido sobre todo por sus lúcidos comentarios y aforismos, lo explica con contundencia:

> Las Matemáticas son una Ciencia excelente, pero los matemáticos no suelen valer ni un ardite. Ocurre con las Matemáticas casi lo mismo que con la Teología. Así como quienes se consagran a esta última pretenden, sobre todo si ocupan cargos públicos, gozar de cierto crédito especial de santidad y una mayor afinidad con Dios, aunque muchos de ellos sean auténticas nulidades, también los denominados matemáticos exigen a menudo que se los tenga por pensadores profundos, aunque entre ellos abunden los mayores zopencos que encontrarse pueda, ineptos para cualquier trabajo que no pueda reducirse sin más ni más a aquella fácil combinación de signos que es obra más de la rutina que del pensamiento.[6]

Lichtenberg, por cierto, escribió hace más de doscientos años un memorándum en que proponía un sistema de tamaños de papel en el que una hoja de un tamaño, digamos A4, se obtuviera juntando dos del tamaño siguiente, pongamos que A5, con la propiedad adicional de que todos los tamaños tuvieran la misma proporción de lado corto a largo. En otras palabras, Lichtenberg recomendaba el uso del actual sistema DIN. La única proporción que permite tal construcción es la de 1 a la raíz cuadrada de 2, que es la que guardan los lados de todos los tamaños DIN. [7]

A diferencia de los científicos de otras disciplinas, los matemáticos no son muy dados al esfuerzo de hacer inteligible y accesible su labor. Y es que, reconozcámoslo, suelen sentirse un tanto “particulares”. Escuchemos a André Weil, una figura de la Matemática del siglo XX:

> El matemático seguirá su camino en la seguridad de que podrá saciar su sed en las mismas fuentes del conocimiento, convencido de que éstas no cesarán de fluir, puras y abundantes, mientras que los demás habrán de recurrir a las aguas cenagosas de una sórdida realidad.
>
> Si se le reprochase al matemático la soberbia de su actitud, si se le reclamase su colaboración, si se le demandase por qué se recluye en los altos glaciares a los que nadie, salvo los de su clase, le pueden seguir, él contestará, con Jacobi*: por el honor del espíritu humano*.[8]

¡Arrea!

[6] De su libro *Aforismos.* Editorial Edhasa, Barcelona, 1991.
[7] Razón por la que muchas fotocopiadoras aparecen botones especiales para la magnificación al 141% y la reducción al 71%, que no son sino aproximaciones a esta proporción fija.
[8] Procede de un artículo publicado en 1950, aunque escrito unos años antes, sobre el porvenir de la Matemática.

La Ciencia abstracta

El astrofísico inglés, y magnifico divulgador científico, John Barrow, nos dice:

> Vista como la galería de todas las pautas, la Matemática es algo infinitamente más grande que la Ciencia. La Ciencia necesita sólo parte del caleidoscopio de las pautas posibles para descifrar el universo físico. [...] Con frecuencia ha ocurrido que las pautas que eran investigadas por los matemáticos por razones puramente estéticas acabaron por desempeñar un papel clave en la estructura del mundo físico.[9]

Por su parte, R. Hersch define[10], con particular acierto, a la Matemática como "la Ciencia de objetos virtuales con propiedades reproducibles" –virtuales más como potenciales que como irreales–. Es decir, primero es una Ciencia, como las demás; pero sus objetos de estudio, y esto es lo específico de la Matemática, son ideales y virtuales. Así que es una Ciencia *abstracta*.

Detengámonos por un momento es esta definición: cada vez que en una Ciencia se crea un modelo, es decir, una idealización de una realidad, sus componentes serán necesariamente virtuales, y su manipulación, inevitablemente matemática. Con frecuencia ese modelo será una réplica o un caso concreto de otros para los que ya se ha desarrollado todo un lenguaje matemático; pero en ocasiones el modelo abstracto, *necesariamente* abstracto, planteará retos nuevos sobre su manipulación matemática.

Y es en esa capacidad de hacer ciencia de lo abstracto donde reside el inmenso poder de la Matemática como lenguaje de la Ciencia. No es paradoja: entendemos lo concreto abstrayendo su esencia en una noción ideal. Y en Ciencia es la Matemática la que nos permite este proceso.

Si se pide que imaginemos una esfera, nadie tiene dificultad en visualizarla en su mente. Pero las esferas no existen como realidades físicas, aunque *haberlas*, *haylas*. Son muchos los objetos físicos que se aproximan al objeto ideal de esfera, pero ninguno lo es *exactamente*. El teorema de Pitágoras, que todo el mundo conoce como una cantinela de su época escolar, "el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos", no es cierto, salvo en el mundo ideal de los objetos matemáticos. Los triángulos rectángulos no existen, salvo...

La Matemática como lenguaje...

Hay quien concibe las Matemáticas como una suerte de *software* mental; y quien, más románticamente, las entiende como la música de la razón. El matemático John Kemeny, uno de los diseñadores del lenguaje de programación BASIC, decía:

> Es hora ya de que aprendamos, como parte de nuestra educación básica, que la Matemática es simplemente un lenguaje, que se caracteriza por su

---

[9] John Barrow: *Imposibilidad: los límites de la Ciencia y la Ciencia de los límites.* Gedisa, Barcelona, 1999.
[10] En *What's Mathematics, really?*. Oxford University Press, 1999.

> capacidad para clarificar y para argumentar lógicamente. El poder de las Matemáticas no es ni más ni menos que el poder de la razón pura.[11]

Las Matemáticas son, desde luego, un lenguaje: un lenguaje diseñado para descubrir y describir patrones. ¿Y no es el objetivo de la Ciencia la búsqueda de patrones que permitan explicar fenómenos? *Explicamos* cuando encontramos simetrías, estructura, patrones que se repiten, que permanecen; y *entendemos* cuando somos capaces de organizar esas pautas en sencillos principios. Pero esos patrones son matemáticos y el lenguaje para analizarlos, combinarlos, para aplicarlos y obtener conclusiones, es el de las Matemáticas.

... y como Ciencia

Y es que hay terreno, ¡mucho terreno!, para la creatividad, la intuición y el ingenio en la Matemática. El matemático crea objetos nuevos, los relaciona con otros ya existentes, investiga propiedades comunes a varios de ellos, los engloba en una teoría que los explica, perfila detalles de esa teoría, dirime cuestiones, con frecuencia delicadas, sobre bajo qué supuestos se tiene tal o cual propiedad.

Pero, ¿qué guía esas búsquedas, esas investigaciones? Siempre hay un sentido estético, una permanente aplicación de la navaja de Occam: cuanto más simple es la explicación de una serie de fenómenos y cuanto mayor sea su rango de aplicación, mejor. No hay lugar permanente –gustan decir los matemáticos- para las Matemáticas sin belleza. Por supuesto, la percepción de lo que es bello varía con el artista: hay matemáticos que gozan con la artesanía de los detalles técnicos intrincados y sutiles, mientras que otros disfrutan más con demostraciones lo más compactas y sintéticas posibles.

Mueve también el reto (¿vanidad?) de saber, de ser el primero en saber, de resolver cuestiones con solera que nadie antes ha sido capaz de dilucidar. Las conjeturas matemáticas son con frecuencia desafíos caballerescos. Schrödinger, el gran físico, recordaba con nostalgia aquellos momentos de profundo goce, solo en la cima, en posesión exclusiva de un nuevo saber, de entender como nunca nadie antes un porqué de la naturaleza.

Y, por último, y no menos importante que los anteriores, mueve el deseo de entender, de explicar con modelos realidades complejas de la Naturaleza o de la Sociedad.

En Matemáticas, como en las demás Ciencias, uno investiga mediante ensayo y error, se pierde en caminos sin salida, descarta teorías, etc. Da igual que sus objetos sean abstractos, la práctica es la misma que en todas las Ciencias. Pero luego, una vez encontrado el camino, éste ha de quedar plasmado en una demostración.

[11] Citado en Rosemary Schmalz: *Out of the mouths of mathematicians*. The Mathematical Association of America, 1993.

La demostración: certeza eterna

El conocimiento matemático se estructura en torno a la demostración. Partimos de unas verdades, los axiomas, y con argumentos lógicos, inapelables, que hay que aplicar con rigor y disciplina sin concesiones, se van construyendo sucesivas conclusiones. Y, en muchas ocasiones, es más relevante el camino seguido que el propio resultado en sí.

Los babilonios ya sabían que existían triángulos rectángulos con lados de longitudes enteras: tómense los catetos de longitudes 3 y 4, y la hipotenusa, Pitágoras *dixit*, resulta ser 5, porque $3^2+4^2=5^2$. Pero, ¿qué ocurre si, en lugar de los cuadrados, nos interesamos por los cubos, potencias cuartas, etc.? Pierre de Fermat conjeturó, hace más de 300 años, que si n es un entero mayor que 2, no podemos encontrar enteros x, y, z para los que

$$x^n + y^n = z^n \ .$$

Éste es el contenido del famoso Último Teorema de Fermat, uno de esos retos del saber que han excitado a generaciones enteras de matemáticos; un resultado de imposibilidad, sobre los que hablaremos más adelante. Fermat aseguraba tener una demostración maravillosa, pero, ¡ay!, no le cabía en uno de los exiguos márgenes de página en los que solía escribir sus razonamientos. Durante siglos, y en el empeño de escalar tan alta cima, se desarrollaron toda una serie de nuevos mundos matemáticos, cuya importancia trasciende el desafío que motivó su creación.

La demostración nos permite alcanzar un conocimiento que, una vez establecido, es inamovible y permanente, absolutamente cierto y definitivamente eterno. Nada menos. Decía el matemático inglés G. Hardy al respecto, con cierto tono escéptico:

> Inmortalidad es tal vez un término estúpido, pero quizás un matemático posea las mayores probabilidades de alcanzarlo, sea cual sea su significado.[12]

Es frecuente que los matemáticos digan que una de las razones que más les atrajeron a las Matemáticas es la combinación de libertad y certeza: certeza en las conclusiones y libertad en los planteamientos; libertad para moverse y certeza de haber llegado.

Einstein afirmaba, por el contrario, que era precisamente eso lo que le había alejado de la Matemática: en ella, decía, uno puede abrir caminos nuevos y puede preguntarse, por ejemplo, qué pasaría si tuviéramos 2 dimensiones y media, o si... Uno tiene libertad para plantearse nuevas situaciones, cambiar los axiomas o las hipótesis, y ver qué sucede. Luego todo tiene que cuadrar. Y sólo el paso del tiempo, la conexión con otras cuestiones y la profundidad de los argumentos determinarán si el camino abierto es de interés o no. Uno no sabe *a priori* si es interesante o no; a cambio, tiene la confianza en la certeza lógica de las conclusiones. En Física, argumentaba Einstein, los problemas están

[12] G. H. Hardy: *Apología de un matemático*. Nivola, Madrid, 1999.

determinados, tienen interés intrínseco, los grandes problemas al menos. Y, claro, las conclusiones no son irrefutables.

La demostración exige disciplina sin concesiones. Un teorema ofrece una conexión lógica sin fisuras para, a partir de unas hipótesis concretas y perfectamente delimitadas, alcanzar una conclusión. La conclusión del teorema es entonces inapelable. Pero si queremos aplicar el teorema hemos de asegurar primero que se cumplen exactamente las hipótesis. No valen ambigüedades, el precio de la certeza en las conclusiones se paga en la precisión sin veleidades de las hipótesis.

Es éste un aspecto de la Matemática que irrita con frecuencia, y en muchos casos con razón, a los científicos e ingenieros, y al público en general, en su relación con los matemáticos; justo a lo que aludía Lichtenberg. En el *Cándido,* Voltaire ironiza, parece que mofándose de Maupertius, sobre un matemático que respondía al problema de por qué ciertas ovejas tenían la lana roja proclamando que *por A más B, menos C, dividido por D, la lana debe ser roja y las ovejas han de morir de sarna.* O la historia, quizás apócrifa, de aquel informe de un grupo de matemáticos que investigaba cómo mejorar la producción lechera y que comenzaba con un *“supongamos que las vacas son esféricas...”*

Cuentan que un día un caballero inglés paseaba por la campiña y, cuando se entretenía en observar unos pájaros, divisó un globo, desde el que otro caballero (inglés también, cabe suponer) le hacía señales para que se acercara. Así lo hizo.

—Gracias. Por favor, ¿dónde estoy?—le preguntó el del globo.

Tras reflexionar un poco, el de tierra le contesta:

—En un globo.

Perplejo, el del globo, tras mirar resignadamente al cielo, le dice:

—Usted es matemático, ¿verdad?

Más perplejo aún, el de tierra se quita el sombrero, se rasca la cabeza, y le pregunta:

—¿Cómo lo ha sabido?

—Muy sencillo: me ha dado usted una respuesta absolutamente precisa, y perfectamente inútil.

Los matemáticos suelen ser un tanto inflexibles, intransigentes dirían algunos, en lo que atañe a su Ciencia; pura deformación profesional. No es inusual que un científico o un ingeniero busque la colaboración de un matemático para dar estructura a un problema o para avanzar en su modelización. Y es entonces frecuente que tropiece con una exigencia de precisión en las nociones y en las definiciones que interrumpe el avance. Es una pena. Y los matemáticos deberían esforzarse en buscar el compromiso entre la indispensable exigencia de rigor en los desarrollos matemáticos y la flexibilidad que requiere su aplicación en la Ciencia y en la Ingeniería.

Lo imposible

La Ciencia abstracta resplandece en el tratamiento de lo imposible. La Matemática como ciencia de objetos virtuales se adapta perfectamente a tratar con el universo de todas las posibilidades, de todo lo concebible, de todo lo abarcable con unas reglas, para, al tiempo, discernir lo que queda fuera, lo que no es posible.

Al intentar determinar si algo es imposible, sea una transformación, una frontera, un límite, etc., necesitamos abarcar todo el conjunto de posibilidades, tangibles o no, existentes o por existir, concebidas o concebibles, un universo abstracto de contingentes, y manipularlos, argumentar sobre ellos. Pero, atención, científicamente, es decir, matemáticamente.

El imposible del que tratamos aquí no es un imposible cualquiera, es el imposible matemático, imposible sin paliativos. No aquél de Lord Kelvin sentenciando la imposibilidad de volar con máquinas más pesadas que el aire, o el de Hegel elucubrando sobre la imposibilidad metafísica de la existencia de un séptimo planeta.

En realidad, la gente tiene muy claro lo que significa un imposible matemático: la mejor definición que hemos encontrado, una que es absolutamente imposible de mejorar, es: “*Lo que no pue ser, no pue ser, y además, es imposible*”. Que algunos atribuyen al maestro *El Gallo*, y otros a *El Guerra*, pues hasta para esto doctores tiene la Iglesia. ¿Cabe definición más rotunda? Quizás sí. La esencia del asunto la pudo captar críptica e insuperablemente, en variación torera sobre un tema anterior, y en tan sólo dos palabras: *im posible*, el in-efable Jesulín de Ubrique.

La Matemática nace en Grecia generando imposibles. Cuenta la tradición que los atenienses, alarmados ante la creciente virulencia de una epidemia, decidieron peregrinar al oráculo de la cercana isla de Delos en busca de consuelo y consejo. Y que se llevaron como penitencia redentora la misión de construir un altar de forma cúbica que duplicara exactamente, en volumen, el ya existente en Delos. Y lo de exactamente iba en serio, tan en serio como la libra de carne sin sangre de *El mercader de Venecia.* Y casi tan difícil, pues había que hacerlo armados sólo con una regla (sin marcar y sin posibilidad de marcar) y de un compás.

Lo de la regla y el compás debió de gustar, y los griegos, ya en alarde de generalización matemática, se propusieron además cuadrar el círculo y trisecar los ángulos. Es decir, hallar procedimientos que, con el sólo uso de esos instrumentos, permitieran hallar un cuadrado de área exactamente igual a la de un círculo, y dividir cualquier ángulo en tres ángulos iguales. Lo de la cuadratura del círculo, tan sonoro y equívocamente sugerente, ha pasado al lenguaje ordinario como paradigma de lo extremadamente difícil; cuadrar el círculo, un trabajo, sin duda, de refinada cantería...

Pues ninguno de los tres *problemas délicos,* duplicar el cubo, cuadrar el círculo y trisecar el ángulo, tiene solución: buscan procedimientos que no existen, son tareas imposibles. Y no fue fácil comprobarlo. Hubo que esperar dos mil años, nada menos, para verificar esa imposibilidad. A pesar de la popularidad de estos problemas y de su larga historia, los héroes finales son desconocidos fuera (e incluso dentro) de los círculos matemáticos: Wentzel y Lindemann.

Pero, ¿cómo puede uno demostrar esa imposibilidad? Porque no se trata de argumentar por aburrimiento tras intentar incontables candidatos voluntaristas. Hay que demostrarlo, y eso es Matemática.

La Matemática se enfrenta a lo imposible de diversas maneras; una de las más elegantes es la *reductio ad absurdum*, una suerte de gambito total, como diría Hardy: primero se ofrece en la argumentación lógica todo el terreno al contrario, y se da por sentado que sí que es posible de alguna forma indeterminada, la que sea, para luego, de un plumazo, desbaratar todas las posibilidades. De esa manera, por ejemplo, se puede demostrar que la raíz cuadrada de 2, la proporción que aplicamos en el estándar DIN, no se puede escribir como un cociente de dos números enteros.

Fueron los pitagóricos quienes acuñaron el término Matemáticas: las Matemáticas eran el conjunto de conocimientos *que había que saber*. Los pitagóricos consideraban al número como esencia de todas las cosas; creían que el número permitía explicar y entender los fenómenos naturales, y el descubrimiento de la numerología de las notas musicales armónicas no hizo sino apuntalar la fe en su creencia. Pero atención, número significaba cociente de números naturales. Así que el que había cantidades geométricas tan naturales como la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1 (la raíz cuadrada de 2, un “número” cuyo cuadrado vale 2) que no se podían medir con fracciones constituyó una verdadera tragedia para la comunidad pitagórica. Cuenta la leyenda que fue un joven miembro de la escuela, Hipaso, quien descubrió la irracionalidad de la raíz de 2, y que los pitagóricos, para asegurarse de que la terrible noticia no se propagaba, lo arrojaron por la borda de un barco para que se ahogara (aunque otras fuentes afirman, por el contrario, que los pitagóricos celebraron alborozados el descubrimiento con una hecatombe, esto es, con el sacrificio de cien bueyes).

Pero no sólo de argumentos por contradicción vive la Matemática en su tratamiento de lo imposible. Digamos que estamos interesados en transformar una cosa A en otra B, con reglas perfectamente definidas. Una vez convencidos, tras numerosas pruebas, de que quizás sea imposible lograrlo, ¿cómo lo demostramos? Buscando un invariante. Un invariante no es sino una característica que se conserva inmutable con cada una de esas transformaciones. Si A tiene esa característica pero B no, entonces ya tenemos garantizada la imposibilidad de la transformación.

Todos sabemos que los mapas de la Tierra no son perfectos y que siempre aparecen distorsiones. En las representaciones usuales de Europa, por ejemplo, los países nórdicos aparecen desmesuradamente grandes. Todas las representaciones planas de la Tierra están distorsionadas, y esto invita a pensar que quizás sea imposible representar bien la Tierra en un mapa. Precisemos, para poder argumentar matemáticamente: queremos representar un trozo de la superficie de la Tierra en un mapa, pero de manera que haya una escala única, la misma en todas partes y en todas direcciones.

Fue el gran Gauss, el *princeps mathematicorum*, quien demostró que tal representación era imposible. La clave, el invariante en cuestión, es la curvatura, un concepto técnico. La Tierra se curva siempre en la misma dirección, digamos que hacia dentro; se dice que tiene curvatura positiva. Una patata *Pringle* o una silla de montar se curvan en direcciones opuestas; se dice que tienen curvatura negativa. Una hoja de papel sobre la mesa, un mapa, no se curva, tiene curvatura cero. La curvatura no es sólo un signo, sino que además es una cantidad: un balón de fútbol está más curvado que la Tierra, porque su radio es menor, pero eso no nos concierne aquí. Lo que Gauss demostró, y tan satisfecho de su logro quedó que él mismo lo llamó *Theorema Egregium*, es que si se transforma una superficie en otra de manera que todas las distancias sobre una superficie se corresponden con distancias en la otra en una escala fija (es decir, si, por ejemplo, todas las distancias quedan divididas por 1000, una escala de 1:1000), entonces el signo de la curvatura se conserva. La Tierra es de curvatura positiva, un plano sobre la mesa tiene curvatura cero... ¡imposible!

Imposibles sociales

"Seamos realistas, pidamos lo imposible", se proclamaba en mayo del 68. Pidamos, por ejemplo, y para empezar, que nuestro sistema de impuestos sea progresivo, en el sentido de que la tasa de impuestos para las rentas más altas sea mayor que para las rentas bajas; y que además sea equitativo con las familias, es decir, que el total de impuestos que un matrimonio paga por sus rentas sea independiente de si hace la declaración conjuntamente o por separado. Parece una buena idea. Tan buena que podríamos plasmarla en una ley, dejando para los técnicos el diseño de las adecuadas tasas de impuestos que cumplan esos requisitos.

Pero, no, tanta perfección es imposible. Un sistema de impuestos con tantas virtudes es imposible. Un ejemplo lo aclara enseguida. Si las rentas de 100 se gravan al 10%, las rentas de 200 se habrán de gravar a un tipo más alto, digamos que al 15%. Pero entonces un matrimonio donde uno gana 200 y el otro 0 pagaría 30, y uno que tiene dos rentas de 100 y 100, y que hiciera la declaración por separado, pagaría 20.

Simplemente no puede ser, las dos virtudes deseadas son incompatibles. Hay que optar, política y socialmente, por una u otra. Las Matemáticas ponen un límite.

Un segundo ejemplo: queremos definir las "preferencias" de una comunidad, lo que llamaríamos, si se nos permite, el "interés nacional". Esto es, si conocemos las preferencias de los miembros de una comunidad ante ciertas opciones, ¿habría forma de obtener, a partir de estas preferencias individuales, algo que pudiéramos llamar las preferencias de la comunidad?

Supongamos que cada individuo ordena tres alternativas, A, B y C, por orden de preferencia. Habrá individuos que prefieran A a C y ésta a B, por ejemplo, mientras que otros individuos optarían por otra ordenación de esas alternativas.

Un orden de preferencia de las alternativas que pudiéramos decir que representa a toda la comunidad debería respetar las ordenaciones individuales, cualitativa y cuantitativamente: 1) si todos los individuos prefieren A a C, entonces la comunidad también prefiere A a C, y 2) si todos prefieren A sobre C, pero ahora cambian de opinión sobre otras alternativas, manteniendo la ordenación entre A y C, entonces las preferencias comunitarias de A y C deben mantenerse. En otros términos, la segunda exigencia pide que el sistema sea independiente de alternativas irrelevantes.

K. Arrow, premio Nobel de Economía en 1972, demostró –efectivamente, lo han adivinado– que la elección social es imposible; o, en términos menos dramáticos, que no existe ningún procedimiento de elección social que respete las reglas anteriores.

Éste es un teorema matemático, los términos son precisos, se trata de permutaciones, de funciones que llevan permutaciones en permutaciones, de ciertas propiedades de monotonía. Y lo que se demuestra es que, para cualquier procedimiento que se diseñe, siempre habrá una comunidad con un conjunto de preferencias individuales de los que no se puede concluir una lista de preferencias que represente a toda la comunidad.

Por ejemplo, supongamos que nuestro procedimiento de elección social es tan simple y natural como fijarse en cada par de alternativas y decidir que la comunidad prefiere a A a D si más gente pone a A por delante de D que a D por delante de A. No es mala idea; pero miremos la siguientes preferencias de una comunidad de 100 personas:

- 40 ordenan A > C > B;
- 35 ordenan B > A > C;
- 25 ordenan C > B > A.

Como el 75% de los miembros de la comunidad prefieren A a C, este sistema proclama que A es preferible a C para la comunidad; pero también pone a C por delante de B y a B por delante de A. Es decir, no ordena, no permite concluir.

De nuevo, no hay sistema perfecto; los hay buenos, y tenemos que optar entre ellos. Aunque si queremos que sea una decisión de la comunidad, quizás primero tengamos que decidir con qué sistema imperfecto decidimos nuestra elección del sistema menos malo...

Dejémoslo aquí, no sin antes señalar, en honor a la precisión, que hay una excepción: existe un procedimiento de decisión colectiva que sí que tiene todas las propiedades exigidas aunque, en realidad, no tiene virtudes, ni es de elección, ni es social... un sistema de cuyo nombre no queremos acordarnos.

No hay tampoco ningún sistema electoral, es decir, ningún procedimiento de asignación de escaños en función de porcentaje de votos, que cumpla unas cuantas exigencias naturales. Por ejemplo, querríamos que más votos se traduzcan siempre en más escaños, algo que, como sabemos, no siempre ocurre en nuestro sistema electoral. Hay muchos sistemas electorales, pero ninguno perfecto; esto nos lo asegura la Matemática. Hay que optar entre distintos sistemas imperfectos, entender claramente las implicaciones de su uso y decantarse por uno.

Cantor, Gödel y Turing: los límites del conocimiento

En un artículo finisecular, la revista norteamericana *Time* encuestaba a intelectuales y científicos sobre los principales logros de la Ciencia en el siglo XX. La única representación de la Matemática en esa lista era debida justamente a un resultado de límites y de imposibilidad.

Kurt Gödel y Alan Turing, y otros varios, pusieron límites, no a la capacidad de raciocinio, sino a la capacidad de organizar conocimiento y también al alcance de los algoritmos y la computación. Nada menos.

George Cantor, a finales del siglo XIX, al desarrollar su teoría de conjuntos, de los tamaños y los órdenes infinitos, descubrió un hecho fascinante: el continuo, todas las distancias imaginables digamos entre distancia 0 y distancia 1, no se puede numerar. Es decir, no podemos hacer una lista con todas esas distancias. Uno creería que sí, pero, una vez más, no, es imposible. El argumento de Cantor, que se conoce como argumento diagonal, por razones que pronto quedarán claras, es brillante. Primero, ¡gambito a la totalidad!: supongamos que sí es posible y que, de alguna forma, hemos podido confeccionar una lista con todas esas distancias. Pongamos que la lista es la siguiente (el argumento con cualquier otra lista sería exactamente el mismo):

0.**3**8761544233456...
0.8**7**264544320012...
0.34**5**62349888888...
0.314**9**5169200000...
0.2789**3**452221009...
...

Y así sucesivamente, se supone que hasta abarcar todas las distancias. Los decimales de algunos de estos números seguirán indefinidamente, mientras que los de otros se pararán.

Pero fijémonos en la diagonal, los dígitos que hemos destacado. Nos dan la distancia 0.37593... Ahora cambiamos cada dígito, por ejemplo, sumando uno (si es un 9, ponemos un 0) y obtenemos 0.48604...

¡*Voilá*! Esta distancia no está en la lista, porque no es la primera (tiene un dígito, el primero, distinto), ni la segunda (tiene un dígito, el segundo, distinto), y así sucesivamente. ¿No es fantástico? Y así haríamos con cualquier intento de escribir una lista con todas las distancias. Hagamos lo que hagamos, siempre se escapa algún número (en realidad, casi todos, pero eso es otra historia).

La pregunta que se hacía Turing, una versión computacional de lo que preocupaba a Gödel, es: ¿cuál es el alcance de los algoritmos, o de los ordenadores? Turing conceptualizó la noción de computación y de ordenador y creó un concepto abstracto, un objeto matemático, la máquina universal de Turing. Y se preguntó si habría un programa supervisor, una suerte de metaprograma, que antes de arrancar cualquier programa con cualesquiera datos nos permitiera saber si se va a parar (por ejemplo, para dar un resultado) o no (por ejemplo, porque entra en un bucle eterno).

Por supuesto, la respuesta es que no. Y de nuevo, gambito total: supongamos que sí. Un programa no es sino una lista de unos y ceros y los datos, lo mismo[13]. Y estas listas no son sino números naturales, de los de contar (escritos en la base binaria). Así que el tal programa supervisor nos daría como resultado una tabla como la siguiente:

DATOS / PROGRAMAS	1	2	3	4	5	...
1	**1**	0	0	1	0	...
2	0	**0**	1	1	1	...
3	1	1	**0**	1	0	...
4	1	1	0	**1**	0	...
...	...	...	...	...	...	...

que nos informa, por ejemplo, de que el programa 3 se para con los datos 1, 2, 4, pero no con los datos 3, 5...

Y ahora en diagonal, cambiando ceros por unos y viceversa: ninguno de los programas tiene un conjunto de paradas codificados con 0, 1, 1, 0... Es decir, hay un conjunto de números naturales que no son detectados por ningún programa. La conclusión final es que “hay cuestiones acerca de los números naturales, como la pertenencia o no a un determinado conjunto, que no son resolubles algorítmicamente”.

Todas esta conclusiones, de gran alcance en la computación, provienen de un análisis con nociones ideales; hasta el ordenador es ideal, esa máquina universal de Turing capaz de emular a cualquier ordenador. Y la manipulación de esas nociones es también abstracta, matemática.

Toda la técnica procede en realidad de Cantor, que se atrevió a tratar el infinito actual, no potencial, de los conjuntos infinitos dados, completos. Todo una osadía. Galileo ya se hacía cruces sobre las paradojas (aparentes, claro) del infinito, al observar que había tantos cuadrados de números como números en sí[14]. Antonio Machado, por boca de su Juan de Mairena, no escapa a ese mismo asombro:

> La serie de los números pares es justamente la mitad de la serie total de los números. La serie de los impares es exactamente la otra mitad. La serie de los pares y de los impares son –ambas– infinitas. La serie total de los números es

[13] Y aquí nos estamos poniendo en un plan absolutamente abstracto, matemático: el conjunto de instrucciones del programa y los datos, sean cuales sean, y olvidándonos de los detalles concretos de cada caso, las entendemos como listas de ceros y unos, el lenguaje que entiende un ordenador.
[14] Galileo Galilei: *Consideraciones y demostraciones matemáticas en torno a dos nuevas ciencias*. Planeta-de Agostini, Barcelona, 1996.

también infinita. ¿Será, entonces, doblemente infinita que la serie de los pares y que la serie de los impares? Sería absurdo pensarlo porque el concepto de infinito no admite más ni menos. ¿Entonces las partes –la serie par o la impar– serían iguales al todo? Átenme ustedes *esa por el mosca rabo*, y díganme en qué consiste lo sofístico de este razonamiento.

Mairena gustaba de hacer razonar en prosa a sus alumnos, para que no razonasen en verso.[15]

Límites por todas partes

En la conferencia Solvay de 1927, Born y Heisenberg, dos de los padres de la Mecánica Cuántica, proclamaban: “¡El determinismo debe ser abandonado!”, mientras Einstein, seguramente, se revolvía en su silla, pensando en Dios y los dados. ¿Qué había detrás de tan provocadora afirmación?: un resultado de imposibilidad, el famoso principio de incertidumbre de Heisenberg, que nos dice, por ejemplo, que es imposible determinar, simultáneamente y con precisión arbitraria, la posición y la velocidad de un electrón.

Unos años después, en 1948, Claude Elwood Shannon, un personaje fascinante, por cierto[16], publicó un trabajo[17] en el que sentaba las bases de la moderna teoría matemática de la información e introducía el marco y los conceptos de la comunicación digital que hoy ya son parte de nuestro bagaje cultural. Los teoremas de Shannon son también resultados de imposibilidad; en este caso, imponen límites a la capacidad de transmitir información sobre un canal si es que no se quieren cometer errores.

Smale, medalla Fields de 1966 (el equivalente al Premio Nobel en Matemáticas), propone, como uno de los más importantes retos matemáticos para el presente siglo, averiguar los límites, si es que los hay, de la inteligencia humana y de la inteligencia artificial. El énfasis provocador radica en su planteamiento como problema matemático.

Y hay quien plantea si no cabría establecer límites, de nuevo, a la capacidad de expresión del arte para captar los conceptos ideales que intenta representar y las realidades que pretende describir. Recordaba recientemente Félix de Azúa en un artículo al escritor japonés Tanizaki, necesitado de cincuenta páginas para sugerirnos someramente el célebre pie de la cortesana Fumiko...

---

[15] Antonio Machado: *Juan de Mairena: sentencias, donaires, apuntes y recuerdos de un profesor apócrifo*, precedido de *Apuntes inéditos, 1933-34*, edición de Pablo del Barco. Alianza Editorial, Madrid, 1981.
[16] Ver, por ejemplo, el artículo de Alberto Solana Ortega “El matemático Claude Shannon. La verdadera revolución de la información aún no ha llegado”. *Nueva Revista*, número 77 (2001).
[17] Claude Shannon: “A Mathematical Theory of Communication”, *Bell System Technical Journal* volumen 27 (1948).