Capítulo 6

Ecuaciones de recurrencia

En argumentos lógicos o en algoritmos, cuando hay que dilucidar o resolver una sucesión de casos, el matemático busca averiguar la estructura común y la conexión de cada caso con el anterior. La técnica es astuta: si podemos reducir cada caso al anterior (con un argumento general), al final sólo nos quedará un primer caso por resolver, del que se deducirán todos. Ésta es la esencia del método de inducción, al que aquí nos estamos refiriendo en el sentido inductivo en el que habitualmente se encuentra en la práctica, y no en el deductivo con el que ineludiblemente se presenta su argumentación (como hicimos en la sección 1.2).

Supongamos que los casos que nos interesan son cálculos de cierto tipo, como podrían ser los de evaluar el número de estructuras (conjuntos, quizás listas) de tamaño o longitud n con ciertas características. Obsérvese que cada caso, que se corresponde con cada valor de n, da lugar a un cálculo distinto. Ahora, el proceso por el que reducimos un caso al anterior dará como fruto una ecuación general que liga los respectivos resultados. Éstas son las ecuaciones de (o en) recurrencias, o simplemente recurrencias, a las que dedicamos este capítulo. No son asunto nuevo en este libro: hemos deducido ya recurrencias para coeficientes binómicos, números de Stirling, y también aparecieron en la discusión sobre la eficacia de algoritmos como la transformada rápida de Fourier o el método de Strassen, por citar algunos ejemplos.

Comenzaremos este capítulo con una sección en la que el lector podrá encontrar un amplio muestrario de cuestiones y argumentos que nos conducen a ecuaciones en recurrencias, que hemos clasificado en función de cuánta información sobre los casos anteriores hace falta conocer y de cuánta complejidad tienen los casos en sí. Esta primera sección pretende ilustrar la técnica "artesana" de esta forma de argumentar.

Luego explicaremos cómo resolver ecuaciones de recurrencia, o en otras palabras, cómo obtener una fórmula general de las sucesiones de números que las verifican, centrándonos en el caso de las ecuaciones de recurrencia lineales y de coeficientes constantes, que son quizás las más habituales, y sin duda las más sencillas. También esbozaremos algunos argumentos que se pueden utilizar en ciertas variaciones de éstas.

En la última sección nos dejaremos deslumbrar por la razón áurea, producto de la ecuación en recurrencias más famosa y fascinante, la ecuación de Fibonacci.

La extraordinariamente fructífera técnica general de las funciones generatrices, que permite, en principio, tratar todo tipo de ecuaciones de recurrencia, habrá de esperar al capítulo 10.

6.1. Algunos ejemplos

Presentamos en esta sección inicial una serie de ejemplos, de naturaleza muy diversa, en cuyo análisis encontraremos un variado muestrario de ecuaciones de recurrencia. Algunos de ellas podremos ya resolverlas, con trucos *ad hoc*; la resolución de las restantes habrá de esperar a disponer de técnicas más generales, como las que expondremos en la sección 6.2 y en el capítulo 10 dedicado a las funciones generatrices.

Por *resolver* una ecuación de recurrencia, algo que ya avisamos al lector es en general tarea harto complicada, entendemos hallar una fórmula explícita para la sucesión de números que verifican la recurrencia.

1. En función del caso anterior

Las ecuaciones de recurrencia más sencillas son aquéllas en las que el valor de un cierto término de la sucesión depende únicamente del valor del término anterior.

EJEMPLO 6.1.1 *Queremos contar el número de listas de longitud $n \geq 1$ formadas con ceros y unos. Llamemos a_n a la respuesta, para cada n.*

No parece un ejemplo muy apasionante, dado que la regla del producto nos permite obtener directamente la respuesta: $a_n = 2^n$, para cada $n \geq 1$. Abordemos el problema desde otro punto de vista, planteando una recurrencia entre los números a_n. Para construir una lista de longitud n con ceros y unos tomamos primero una lista de longitud $n-1$ con las características pedidas (lo podremos hacer de a_{n-1} formas distintas). Luego, a cada una de ellas, le añadimos un 0 o un 1, para obtener así todas las posibles listas de longitud n. Como este procedimiento asocia a cada posible lista de longitud $n-1$ dos listas distintas de longitud n, se tendrá que

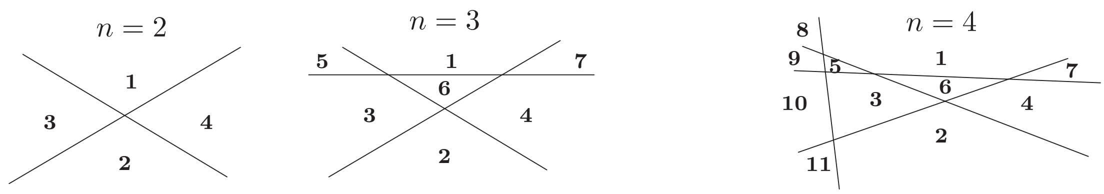
$$(*) \quad \boxed{a_n = 2\,a_{n-1}} \qquad \text{para } n \geq 2.$$

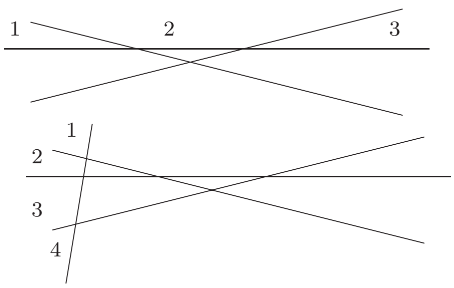
Necesitamos, además, un valor inicial, el número de listas de longitud 1: $a_1 = 2$. El problema queda así resuelto en el siguiente sentido: el conocimiento de a_1 y la relación $(*)$ nos permiten calcular a_2; con a_2, aplicando de nuevo $(*)$, evaluamos a_3, etc. Pero en este caso, además, podemos resolver la recurrencia y obtener una fórmula explícita para los a_n: basta aplicar reiteradamente la regla para obtener que, para cada $n \geq 1$,

$$a_n = 2\,a_{n-1} = 2\,(2a_{n-2}) = 2^2 a_{n-2} = 2^3 a_{n-3} = \cdots = 2^{n-1} a_1 = 2^n\,. \qquad ♣$$

EJEMPLO 6.1.2 *Llamemos a_n al número de regiones del plano que determinan n rectas. Estas rectas deben ser tales que por cualquier punto del plano pasen a lo sumo dos de ellas; y tales que ninguna de ellas sea paralela a ninguna otra.*

Calculemos los primeros casos: para $n = 1$, tenemos una recta, que divide al plano en dos regiones. Para $n = 2$, $n = 3$ y $n = 4$ aparecen cuatro, siete y once regiones, respectivamente:





Ya tenemos los primeros cuatro valores $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 7$ y $a_4 = 11$. Pero este análisis pictórico no nos va a llevar mucho más allá, pues el dibujo se complica enormemente y corremos el riesgo de olvidarnos alguna región. Toca pensar: fijémonos en cómo pasamos de $n = 2$ a $n = 3$. Al añadir una recta, y como las dos rectas "viejas" deben cortar a la "nueva", lo que hacemos es añadir tres regiones del plano. El paso del caso $n = 3$ al caso $n = 4$ es análogo (véase el dibujo): de nuevo añadimos una recta, que corta a las tres existentes y crea cuatro regiones nuevas. La generalización de este argumento nos permite deducir que la regla de recurrencia es

$$\boxed{a_n = a_{n-1} + n} \qquad \text{para cada } n \geq 2.$$

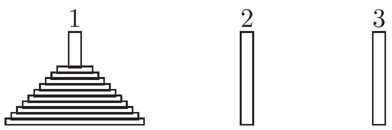
Como conocemos el valor para el primer caso, $a_1 = 2$, podremos calcularlos todos. El lector podrá resolver la recurrencia sin más que aplicar reiteradamente la regla de recursión. Alternativamente, como la regla de recurrencia nos dice que la diferencia entre dos términos consecutivos es justamente el valor del índice ($a_n - a_{n-1} = n$), podemos escribir todas estas diferencias y sumarlas, como hacemos a la derecha. Como $a_1 = 2$ y sabemos sumar los n primeros números naturales, llegamos a la solución final:

$$\begin{array}{ccc}
a_n - a_{n-1} & = & n \\
a_{n-1} - a_{n-2} & = & n-1 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_2 - a_1 & = & 2 \\
\hline
a_n - a_1 & = & 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n
\end{array}$$

$$a_n = 2 + \sum_{j=2}^{n} j = 1 + \sum_{j=1}^{n} j = 1 + \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{para cada } n \geq 1.$$

♣

EJEMPLO 6.1.3 *Las torres de Hanoi.*

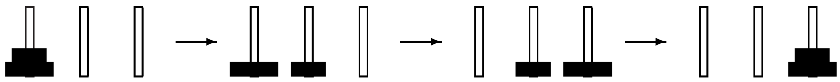


Cuenta la leyenda[1] que los monjes de un monasterio de Hanoi miden el tiempo que falta para la llegada del fin del mundo con el siguiente procedimiento: disponen de tres agujas de diamante, en una de las cuales se apilan 64 discos de oro distintos, ordenados por tamaños. Cada segundo mueven un disco de una aguja a otra, y su tarea finalizará (y con ella el mundo) cuando logren transportarlos todos a otra aguja. Pero, ¡atención!, a lo largo del proceso nunca se puede colocar un disco sobre otro de diámetro más pequeño.

Como prepararnos para el fin del mundo supondrá sin duda un notable ajetreo, vamos a estimar el tiempo de que dispondremos. Para ello, planteamos el problema ya en general: tenemos n discos y llamamos a_n al mínimo número de movimientos necesario para transportar los n discos desde una aguja a otra. Por ejemplo, $a_1 = 1$, porque nos basta con un movimiento para pasar el disco a otra aguja. El cálculo de a_2 requiere ya un pequeño argumento: podemos,

[1]En realidad, la historia que sigue es el adorno literario que concibió el matemático francés Lucas en 1883.

por ejemplo, pasar el disco pequeño a otra aguja, luego el grande a la tercera, para finalmente pasar el pequeño a esta tercera aguja, como en la figura:



Como en dos movimientos no se puede hacer, concluimos que la descrita es la mejor estrategia posible, y que, por tanto, $a_2 = 3$.

Si partimos de tres discos, podemos pasar los dos menores a una segunda aguja (con el procedimiento anterior, de tres movimientos), luego pasar el mayor a la tercera aguja, para finalmente llevar los dos discos menores sobre ese disco mayor (de nuevo tres movimientos). En total, 7 movimientos. Aunque ahora no está claro si se puede hacer el trasvase con menos.

El procedimiento esbozado en el caso $n = 3$ se puede generalizar: si tenemos n discos, pasamos $n - 1$ a una segunda aguja, luego el mayor disco a la aguja final y, por último, pasamos los $n - 1$ discos a esa tercera aguja. Es un algoritmo recursivo: el procedimiento para mover n discos se apoya, dos veces, en el (ya conocido) método para mover $n - 1$. Se deduce entonces que el número mínimo de movimientos para transportar n discos cumple que

$$a_n \leq 2\, a_{n-1} + 1 \qquad \text{para cada } n \geq 2,$$

porque con $2a_{n-1} + 1$ movimientos lo sabemos hacer. Obsérvese que no es una ecuación de recurrencia, sino una desigualdad. Pero lo que nos gustaría es comprobar que, en realidad, la relación se cumple con un $=$ en lugar de un $\leq$. Deduciríamos así que nuestra estrategia de movimientos es la mejor posible. Esto requiere un argumento extra.

Veámoslo: si tenemos n discos, en algún momento tendremos que mover el disco mayor, para lo que necesitaremos haber llevado el resto de los discos a otra aguja, pues debe quedar una aguja libre. Esto requiere, como mínimo, a_{n-1} movimientos. Una vez movido el disco grande a una aguja, tendremos que mover los restantes $n - 1$ discos sobre él, y esto exige, al menos, otros a_{n-1} movimientos (sea cual sea la estrategia que empleemos). Así que

$$a_n \geq 2\, a_{n-1} + 1\,,$$

para $n \geq 2$. Reuniendo ambas condiciones, ya podemos afirmar que, para cada $n \geq 2$,

$$\boxed{a_n = 2\, a_{n-1} + 1}$$

La condición inicial ya la hemos visto, es $a_1 = 1$. La resolvemos por simple aplicación repetida de la regla de recurrencia:

$$\begin{aligned} a_n &= 2\, a_{n-1} + 1 = 2\,(2\, a_{n-2} + 1) + 1 = 2^2\, a_{n-2} + 2 + 1 = 2^2\,(2\, a_{n-3} + 1) + 2 + 1 \\ &= 2^3\, a_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 = 2^3\,(2\, a_{n-4} + 1)\, 2^2 + 2 + 1 = 2^4\, a_{n-4} + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 \\ &= \cdots = 2^{n-1} a_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2 + 1 = \sum_{j=0}^{n-1} 2^j = \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2^n - 1\,. \end{aligned}$$

Del caso $n = 64$ deducimos que el fin del mundo llegará dentro de $a_{64} = 2^{64} - 1$ segundos, esto es, ¡más de medio billón de años! Parece que, después de todo, la profecía de los monjes de Hanoi no debería ser una de nuestras mayores preocupaciones. ♣

Ejemplo 6.1.4 *Calculemos el valor de la siguiente aparentemente complicada integral*[2]*:*

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n\, e^{-t}\, dt\,, \qquad \textit{para cada } n \geq 0.$$

El caso $n = 0$ es muy sencillo: $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = -e^{-t}\big|_0^\infty = 1$. Vamos a obtener una ecuación de recurrencia para los números $\Gamma(n)$, pero no a través de argumentos combinatorios, como hasta ahora, sino por medio de *manipulaciones algebraicas* basadas en el método de integración por partes. Sea ahora $n \geq 1$ y escojamos

$$\begin{aligned} u = t^n \quad &\Longrightarrow \quad du = n\, t^{n-1}\, dt \\ dv = e^{-t}\, dt \quad &\Longrightarrow \quad v = -e^{-t} \end{aligned}$$

para la aplicación de la habitual fórmula de integración por partes:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n\, e^{-t}\, dt = \underbrace{-t^n\, e^{-t}\Big|_0^\infty}_{=0} + n \underbrace{\int_0^\infty t^{n-1} e^{-t}\, dt}_{\Gamma(n)} = n\,\Gamma(n)\,.$$

La ecuación de recurrencia resulta ser

$$\boxed{\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)} \qquad \text{para } n \geq 1.$$

Obsérvese que ahora el coeficiente que acompaña al término anterior no es una constante. Pero la resolución es, de nuevo, sencilla, por iteración:

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = n(n-1)\,\Gamma(n-1) = \cdots = n(n-1)\ldots 3\cdot 2\,\Gamma(1)\,.$$

Como el valor inicial era $\Gamma(1) = 1$, concluimos que, quizás sorprendentemente,

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n\, e^{-t}\, dt = n!\,.$$

♣

Antes de seguir adelante, parémonos a reflexionar sobre el **procedimiento general** seguido en los análisis que hemos hecho hasta aquí, pues nos servirá, con las modificaciones que exijan los posteriores ejemplos que vayamos viendo, como protocolo general:

1. empezamos analizando el primer caso, digamos el valor de a_1;
2. luego buscamos argumentos que nos permitan establecer el valor de cada a_n en términos del correspondiente a_{n-1};
3. con esto ya tenemos resuelto el problema, pues de a_1 y la regla de recurrencia obtenemos el valor de a_2, luego éste nos permite calcular a_3, etc.;
4. pero, cuando sea posible, iremos más allá en el análisis y resolveremos la recurrencia. Esto es, obtendremos una fórmula explícita $a_n = f(n)$ para cada $n \geq 1$.

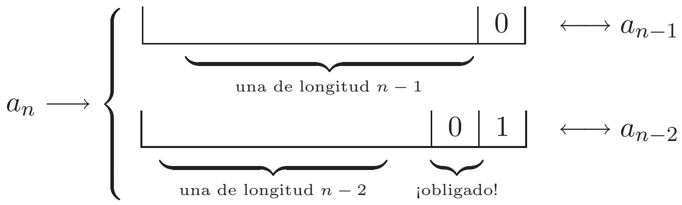
[2] Que es un caso particular de la **función gamma**, definida como $\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z\, e^{-t}\, dt$ para cada $z \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}(z) > -1$.

2. En función de los dos casos anteriores

En muchas ocasiones, para determinar el valor de un término de la sucesión, bastará disponer del valor de los dos anteriores. Serán normalmente ejemplos en los que nos encontraremos con una disyuntiva: una opción nos llevará al caso anterior, mientras que la otra se escribirá en términos del que está dos posiciones más allá.

Ejemplo 6.1.5 *Llamemos a_n al número de listas de longitud n, formadas con ceros y unos, que no tienen unos consecutivos.*

Nos fijamos, por ejemplo, en la última posición. Caben dos posibilidades, que la lista acabe en 0 ó en 1. Las que acaban en 0 se construyen dando una de longitud $n-1$ que cumpla las condiciones (ceros y unos, sin unos consecutivos) y añadiéndole un 0 al final (compruébese que es una biyección). Las acabadas en 1 llevan, necesariamente, un 0 en la penúltima posición; así que habrá tantas como listas de longitud $n-2$ que cumplan las condiciones:



Por tanto, la regla de recurrencia será, para cada $n \geq 3$,

$$\boxed{a_n = a_{n-1} + a_{n-2}}$$

Una ecuación muy especial, conocida como la **ecuación de Fibonacci**, que volverá a aparecer en los siguientes ejemplos. Observemos que los valores iniciales, que permiten "arrancar" a la sucesión, son aquí $a_1 = 2$ y $a_2 = 3$. ♣

Ejemplo 6.1.6 *Tenemos una escalera con n peldaños y en cada paso se permite subir 1 ó 2 peldaños. Llamamos a_n al número de formas distintas de subir la escalera con ese tipo de pasos (dos formas de subir serán distintas si la secuencia de pasos seguida es distinta).*

Para contar cuántas de estas peculiares ascensiones de una escalera con n peldaños hay, las clasificaremos atendiendo a cómo se completa la escalada. Hay dos posibilidades:

- llegar al peldaño $n-1$ y luego subir el último peldaño en un paso;
- o llegar al $n-2$ y luego un paso de dos peldaños.

Así que la relación de recurrencia es, de nuevo, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para cada $n \geq 3$. Aunque ahora los valores iniciales no son los del ejemplo anterior, sino que $a_1 = 1$ y $a_2 = 2$. Como las condiciones iniciales son distintas, las sucesiones de números no coinciden, aunque en realidad una está desplazada una posición de la otra:

$$\begin{array}{lcccccccc} & & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & \cdots \\ \#\,\text{listas del ejemplo 6.1.5} & \longrightarrow & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 & \cdots \\ \#\,\text{caminos en la escalera} & \longrightarrow & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & \cdots \end{array}$$

Como veremos en el siguiente ejemplo, el comportamiento asintótico de la sucesión no depende de los valores iniciales, sino que viene dictado por la ecuación. ♣

EJEMPLO 6.1.7 *Un modelo de cunicultura.*

FIGURA 6.1: Fibonacci

Fibonacci[3] introdujo la sucesión que lleva su nombre[4] como modelo para la reproducción de conejos. Partía Fibonacci de ciertas hipótesis, a saber: (a) los conejos viven eternamente; (b) cada mes, un par de adultos de distinto sexo da lugar a un nuevo par de conejos de distinto sexo; y (c) cada conejo se hace adulto a los dos meses de vida, momento en el que comienza a tener descendencia. Designemos por F_n el número de pares de conejos al final del mes n. Partimos de un par de conejos que nacen en el primer mes; esto es, $F_1 = 1$. Al cabo de un mes seguiremos teniendo una pareja de conejos, todavía no adultos: $F_2 = 1$. En el tercer mes ya tenemos una pareja de adultos, que da lugar a una pareja de recién nacidos: $F_3 = 2$. En el cuarto mes seguiremos teniendo una pareja de adultos, que tendrá descendencia. Y la pareja nacida en el mes anterior tendrá ahora un mes. En total, habrá tres parejas de conejos: $F_4 = 3$. Y así, sucesivamente.

Mes	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	$\cdots$
Parejas de adultos	0	0	1	1	2	3	5	$\cdots$
Parejas con un mes de edad	0	1	0	1	1	2	3	$\cdots$
Parejas de recién nacidos	1	0	1	1	2	3	5	$\cdots$
Número total de parejas, F_n	1	1	2	3	5	8	13	$\cdots$

La tabla de la derecha recoge las distintas poblaciones al comienzo de cada mes. El número de parejas en el mes n es la suma del número de parejas en el mes $n-1$ más las parejas que nacen en el propio mes n. De éstas hay tantas como parejas *adultas* hubiera en el mes n. Y a su vez, tantas como parejas en el mes $n-2$ (pues se tardan dos meses en ser adulto). En total, para cada $n \geq 3$,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\,; \qquad \text{de nuevo, la ecuación de Fibonacci.}$$

Si definimos $F_0 = 0$, la ecuación de recurrencia es válida para cada $n \geq 2$. En lo sucesivo reservaremos el nombre de F_n para los números siguientes:

Definición 6.1 *La sucesión de* ***números de Fibonacci*** (F_n) *cumple, para cada $n \geq 2$, que*

$$\boxed{F_n = F_{n-1} + F_{n-2}} \qquad \textit{(la } \textbf{\textit{ecuación de Fibonacci}}\textit{)}$$

junto con las condiciones iniciales $F_0 = 0$, $F_1 = 1$. Los primeros términos de esta sucesión son

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	$\cdots$
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	$\cdots$

[3]La ilustración que aquí reproducimos es la cabeza de la estatua que erigieron cerca del río Arno los ciudadanos de Pisa en honor de Leonardo de Pisa (1170-1250), también llamado Fibonacci (hijo de Bonacci). Fibonacci viajó por todo el Mediterráneo y en el curso de sus viajes tomó contacto con las Matemáticas que los árabes habían recopilado. Su *Liber Abaci* de 1202 tuvo una enorme influencia en su tiempo. En él se recogían numerosos resultados sobre Geometría y Teoría de Números, además de cuestiones prácticas sobre problemas mercantiles, métodos de multiplicación, etc. El texto estableció definitivamente en Occidente los numerales arábigos y el sistema hindú de numeración.

[4]Fue el matemático francés Edouard Lucas (1842-1891) el que así la bautizó. En el ejemplo 6.3.1 veremos una sucesión de números que lleva su nombre y que está muy relacionada con los de Fibonacci. Lucas trabajó fundamentalmente en Teoría de Números, con estudios sobre la sucesión de Fibonacci o sobre criterios de primalidad (criterio de Lucas-Lehmer). También gustaba de proponer juegos y acertijos matemáticos, como el de las torres de Hanoi que veíamos en el ejemplo 6.1.3, que recogió en sus *Récréations mathématiques* de 1882.

Aunque tendremos que esperar a la sección 6.2 para obtener una fórmula para estos números F_n, podemos ya analizar su comportamiento asintótico; esto es, el orden de magnitud de los números F_n cuando $n \to \infty$. Observemos, para empezar, los valores numéricos de sucesivas razones de números de Fibonacci consecutivos:

1/1	2/1	3/2	5/3	8/5	13/8	21/13	34/21	55/34	89/55	144/89	$\cdots$
1	2	1,5000	1,6666	1,6000	1,6250	1,6153	1,6190	1,6176	1,6181	1,6179	$\cdots$

Que parecen indicar que los números F_n crecen, más o menos, con una tasa fija, pues el cociente de dos números de Fibonacci consecutivos F_n/F_{n-1} es, aproximadamente, como una constante $x > 1$ (en torno a 1,61 "y pico") cuando n es grande. En otras palabras, parece que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = x\,.$$

Si fuera cierta esta intuición heurística, ¿qué condición habría de cumplir ese hipotético número x? Reescribamos la ecuación de Fibonacci para exhibir cocientes de términos consecutivos:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{F_n}{F_{n-1}} = 1 + \frac{1}{\dfrac{F_{n-1}}{F_{n-2}}}\,.$$

Pasando al límite $n \to \infty$, el número x debería cumplir que

$$x = 1 + \frac{1}{x}\,; \quad \text{o en otras palabras, que} \quad x^2 - x - 1 = 0\,.$$

Las soluciones de esta ecuación de segundo grado son los números $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. El segundo de ellos, un número negativo, no puede ser esa tasa fija de crecimiento, pues los F_n son positivos. El otro, la raíz positiva de la ecuación, es un número sobre el que ya hablamos en el capítulo 1: la **razón áurea** $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, a cuyas asombrosas peculiaridades dedicaremos toda la sección 6.3.

Pero pongámonos serios (y formales): ¿es cierto o no que F_n/F_{n-1} tiende a τ cuando $n \to \infty$? Restamos primero τ a ambos lados de la ecuación de Fibonacci, utilizamos que $\tau = 1 + 1/\tau$ y reordenamos los términos astutamente, para obtener que:

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} - \tau = 1 + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}} - \tau = \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}} - \frac{1}{\tau} = -\frac{1}{\tau}\,\frac{F_{n-2}}{F_{n-1}} \left[\frac{F_{n-1}}{F_{n-2}} - \tau\right].$$

Ahora, tomamos valores absolutos:

$$\left|\frac{F_n}{F_{n-1}} - \tau\right| = \frac{1}{\tau}\,\frac{F_{n-2}}{F_{n-1}}\left|\frac{F_{n-1}}{F_{n-2}} - \tau\right| \; < \frac{1}{\tau}\left|\frac{F_{n-1}}{F_{n-2}} - \tau\right|,$$

donde hemos utilizado que los números de Fibonacci forman una sucesión creciente y que, por tanto, $F_{n-2}/F_{n-1} < 1$. Obsérvese la simetría de la expresión: a la derecha y a la izquierda tenemos la diferencia entre un cociente de números de Fibonacci consecutivos y la razón áurea; ¡pero a la derecha, de índices más pequeños! Iterando esta desigualdad, llegamos a que

$$\left|\frac{F_n}{F_{n-1}} - \tau\right| < \frac{1}{\tau}\left|\frac{F_{n-1}}{F_{n-2}} - \tau\right| < \frac{1}{\tau^2}\left|\frac{F_{n-2}}{F_{n-3}} - \tau\right| < \cdots < \frac{1}{\tau^{n-2}}\left|\frac{F_2}{F_1} - \tau\right| = \frac{1}{\tau^{n-2}}\,\big|1-\tau\big|\,.$$

Como $\tau > 1$, deducimos que $|F_n/F_{n-1} - \tau| \to 0$ cuando $n \to \infty$ y que, por tanto, $F_n/F_{n-1} \to \tau$ cuando $n \to \infty$. ♣

Ejemplo 6.1.8 *Desbarajustes.*

En la subsección 3.2.3 nos ocupamos del número D_n de desbarajustes de $\{1, \dots, n\}$, las permutaciones de $\{1, \dots, n\}$ en las que ningún símbolo ocupaba su posición natural. Obtuvimos entonces una fórmula (un tanto complicada) para D_n, utilizando el principio de inclusión/exclusión. Buscamos ahora una relación de recurrencia para estos números.

Los primeros valores son fáciles de calcular, por simple enumeración de casos: $D_1 = 0$, $D_2 = 1$ y $D_3 = 2$. Analicemos el caso $n = 4$, que ya contiene los ingredientes del caso general. Tomemos un desbarajuste de los que cuenta D_3; por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Queremos construir un desbarajuste de cuatro posiciones a partir de él. El elemento 4 no puede ir en la cuarta posición (no sería desbarajuste), así que necesariamente ha de ir en una de las tres anteriores. Si va, por ejemplo, en la primera, colocaremos en la cuarta posición el elemento que antes iba en la primera (para que siga siendo un desbarajuste); y lo mismo si va en la segunda o en la tercera:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & \bullet \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \mathbf{4} & 1 & 2 & \mathbf{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & \mathbf{4} & 2 & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & \mathbf{4} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

Así que, para cada desbarajuste de tres posiciones podemos formar 3 desbarajustes de cuatro posiciones (uno por cada posible posible posición en la que colocar el 4). Sin embargo, hay unos desbarajustes de cuatro posiciones que no podemos construir de esta manera: por ejemplo, el siguiente:

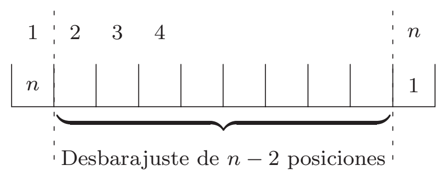
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

pues construir este desbarajuste con el procedimiento anterior requeriría haber partido de una permutación que no es un desbarajuste, la lista $(1, 3, 2)$. Aunque convendrá el lector que este desbarajuste de longitud 4 es muy especial: en él, el 4 y el 1 forman un ciclo.

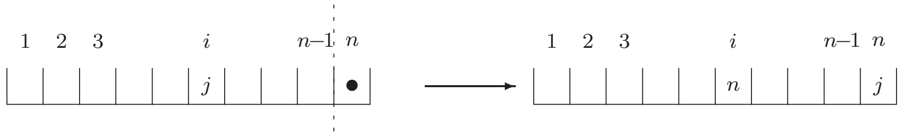
Pero para construir un desbarajuste (de longitud 4) en el que el 4 y otro elemento formen una transposición, basta construir un desbarajuste con el resto de las posiciones (en este caso, dos). Tenemos, además, libertad para elegir el elemento con el que el 4 forma ciclo: puede ser el 1, el 2 o el 3. De manera que de estos desbarajustes de longitud 4 hay $3D_2$. De donde deducimos que

$$D_4 = 3\, D_3 + 3\, D_2\,.$$

Hagamos el argumento en el caso general de un D_n cualquiera. Tenemos, por un lado, los desbarajustes en los que n forma una transposición con algún otro elemento. En el esquema de la derecha, el 1. De éstos tendremos $(n-1)D_{n-2}$, porque hay $n-1$ candidatos a formar la transposición con n.



Por otro lado, tendremos los desbarajustes en los que la situación anterior no ocurre, es decir, en los que el elemento n no forma ciclo de orden 2 con otro elemento. Pero éstos son justamente los desbarajustes que se pueden formar a partir de los de $n-1$ posiciones con el siguiente proceso: por cada desbarajuste de $n-1$ posiciones, elegimos una posición i para colocar el elemento n; en la posición n colocamos lo que hubiera en la posición i.



De éstas habrá $(n-1)D_{n-1}$. En total,

$$\boxed{D_n = (n-1)D_{n-1} + (n-1)D_{n-2}} \qquad \text{para } n \geq 3.$$

Note el lector que esta relación requiere, para obtener el valor de un cierto término, el conocimiento de los dos anteriores. Pero, a diferencia de lo que ocurría con los ejemplos anteriores, *los coeficientes no son constantes*, sino que dependen del paso en que estemos.

Afortunadamente, podemos encontrar un truco que nos permite reducir esta ecuación a una que sólo involucra el término anterior, que resolveremos luego por simple iteración. La clave es observar que podemos reescribir la recurrencia como

$$D_n - nD_{n-1} = -D_{n-1} + (n-1)D_{n-2} = -\left[D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}\right].$$

En estos nuevos términos, sólo queda iterar la relación:

$$\begin{aligned} D_n - nD_{n-1} &= -\left[D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}\right] = (-1)^2\left[D_{n-2} - (n-2)D_{n-3}\right] = \\ &= \cdots = (-1)^{n-2}[D_2 - 2D_1] = (-1)^{n-2} = (-1)^n, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado los valores iniciales $D_2 = 1$ y $D_1 = 0$. Así que, para cada $n \geq 2$,

$$D_n - nD_{n-1} = (-1)^n,$$

que, obsérvese, involucra sólo el término anterior. Si dividimos toda la expresión por $n!$,

$$\frac{D_n}{n!} - \frac{D_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!},$$

obtenemos una ecuación que se resuelve con el procedimiento (ya visto en el ejemplo 6.1.2) de sumar todas estas expresiones desde n hasta 1. Así llegamos a que

$$\frac{D_n}{n!} - \frac{D_1}{1!} = \sum_{j=2}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}.$$

En otras palabras, como $D_1 = 0$,

$$D_n = n! \sum_{j=2}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} = n! \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!},$$

porque los términos $j = 0$ y $j = 1$ se cancelan entre sí. Es, claro, el mismo resultado que el que obteníamos con el principio de inclusión/exclusión. ♣

En ocasiones, las “condiciones iniciales” que determinan, junto a la ecuación de recurrencia, los valores de la sucesión, no son como las que hemos visto hasta aquí.

Ejemplo 6.1.9 *La ruina del jugador*[5].

Para analizar este ejemplo, al que volveremos en diversas ocasiones a lo largo de este capítulo, apelaremos a que el lector está familiarizado con ciertos conceptos probabilísticos, en particular, con la noción de probabilidad condicionada (en caso contrario, puede consultarse primero el capítulo 7).

Queremos apostar nuestro dinero en un cierto juego. En cada partida apostamos 1 euro. Si ganamos, nos devuelven el euro apostado junto con otro más, y en caso contrario perdemos el euro apostado. La probabilidad de ganar cada partida es p, un número entre 0 y 1 (la de perder será $q = 1-p$). Fijamos *a priori* una cota de N euros, y sólo abandonaremos el juego cuando nuestra fortuna acumulada tras sucesivas partidas la haya alcanzado o cuando nos hayamos arruinado[6]. Supongamos que al empezar a jugar disponemos de n euros ($0 \le n \le N$). La pregunta es: ¿cuál es la probabilidad, que llamaremos $a(n)$, de que nos arruinemos?

Observe el lector que $a(0) = 1$, porque si la fortuna inicial es 0, no podremos ni siquiera empezar a jugar. Por otro lado, $a(N) = 0$, porque si al principio tenemos N euros, tal y como hemos convenido, nos retiramos. Como decíamos antes, no son éstas unas condiciones iniciales al uso, pero serán suficientes[7].

Supongamos que $0 < n < N$. Para obtener la regla de recurrencia que cumplen los $a(n)$, vamos a condicionar sobre el resultado de la primera partida. Llamemos G al suceso “ganar la primera” (cuya probabilidad es p) y P al suceso “perder la primera” (de probabilidad $q = 1-p$). Entonces,

$$\mathbf{P}(\text{ruina}) = \mathbf{P}(\text{ruina}|G)\,\mathbf{P}(G) + \mathbf{P}(\text{ruina}|P)\,\mathbf{P}(P)\,.$$

Pero si hemos ganado la primera partida, tendremos $n+1$ euros; y la probabilidad de arruinarnos es la misma que si hubiéramos empezado a jugar con esos $n+1$ euros. El mismo argumento, hecho para el caso de la pérdida de la primera partida, nos lleva a que

$$a(n) = p\,a(n+1) + q\,a(n-1) \qquad \text{para cada } 1 \le n \le N-1.$$

Relación que conviene escribir como

$$\boxed{a(n+2) = \frac{1}{p}\,a(n+1) - \frac{q}{p}\,a(n)} \qquad \text{para cada } 0 \le n \le N-2$$

Resolveremos este problema (la regla de recurrencia junto con las condiciones $a(0) = 1$ y $a(N) = 0$) en el ejemplo 6.2.2, donde comprobaremos la extraordinaria importancia que tiene el que estemos ante un “juego equilibrado” ($p = q = 0{,}5$) o no ($p \neq q$). ♣

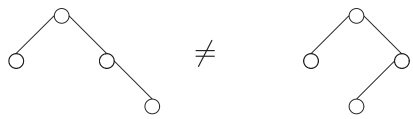
[5] ¿O es que quizás conoce el lector algún jugador que no acabe en la ruina?

[6] ¿Acaso podríamos estar jugando indefinidamente? No es el caso: se puede demostrar, pero esto requiere el manejo del cálculo de probabilidades, que el juego acaba, con uno u otro resultado, con probabilidad 1.

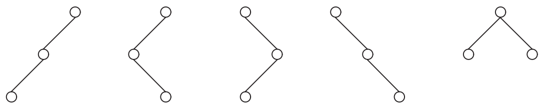
[7] Quizás el lector avezado preferiría llamarlas *condiciones de contorno* o de frontera.

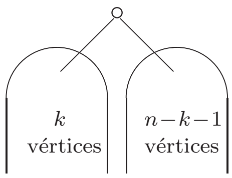
3. En función de todos los casos anteriores

EJEMPLO 6.1.10 *Contemos el número de árboles con raíz casi binarios que podemos formar con n vértices y en los que distinguiremos entre "derecha" e "izquierda".*



Aunque más adelante (en la sección 8.2.3) los estudiaremos con más detalle, no es difícil entender lo que es un árbol binario con raíz: la raíz es el vértice que situamos (curiosamente) más arriba, y el que sea (casi)binario quiere decir que cada vértice puede tener hasta dos "descendientes" hacia abajo. En cuanto a la diferencia entre "izquierda" y "derecha", el dibujo de la derecha muestra dos árboles que nosotros consideraremos como distintos. Sea C_n al número de árboles con estas características. Los primeros valores son $C_1 = 1$ y $C_2 = 2$. En el siguiente dibujo exhibimos los cinco árboles distintos que se pueden formar con tres vértices:





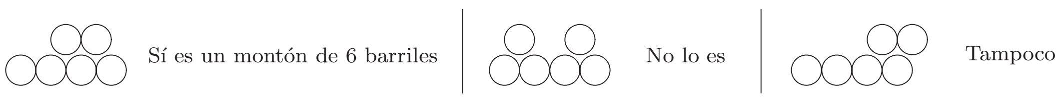
Así que $C_3 = 5$. Puede el lector entretenerse dibujando los 14 árboles con cuatro vértices que existen para comprobar que $C_4 = 14$. Argumentemos en general, para C_n: cualquier árbol de este tipo tendrá k vértices a la izquierda de la raíz y $n-1-k$ a la derecha, donde $0 \leq k \leq n-1$, como en el dibujo. Las elecciones del árbol que va a la izquierda de la raíz y la del que va a la derecha son independientes, y para contar el número de posibles elecciones de ambos tendremos en cuenta la diferencia izquierda-derecha. Aplicando las reglas de la suma y del producto y definiendo, como resulta conveniente, $C_0 = 1$, obtenemos que

$$\boxed{C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \cdots + C_{n-2} C_1 + C_{n-1} C_0 = \sum_{k=0}^{n-1} C_k\, C_{n-1-k}}$$

Ahora, para calcular un cierto término C_n, necesitamos conocer todos los anteriores. Esta recurrencia es la que cumplen los números de Catalan, como ya vimos en el ejemplo 2.3.3. Así que hemos encontrado otro problema combinatorio cuya respuesta está en estos números, de los que ya obtuvimos una fórmula explícita (véase el ejemplo 3.1.3). Resolveremos esta recurrencia utilizando las técnicas de las funciones generatrices (véase el ejemplo 10.4.5). ♣

EJEMPLO 6.1.11 *El problema de los montones de barriles.*

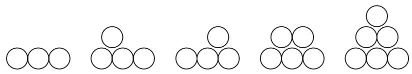
Miramos, desde un lateral, la carga de un camión lleno de barriles de cerveza[8]. Nos interesan las disposiciones de barriles en las que, en cada fila, los barriles forman *una tira continua*; y cada barril, por una simple cuestión de equilibrio, ha de apoyarse en dos de la fila inferior:



Interesa conocer M_n, el número de montones distintos que tienen n barriles en la fila base.

[8]Dejamos al lector que proponga la marca, en función de su ideología cervecera.

Por ejemplo, $M_1 = 1$ y $M_2 = 2$. Si $n = 3$, tenemos los cinco posibles montones del dibujo. Compruebe el lector que hay 13 posibles montones con 4 barriles en la base.



Cualquier montón con n barriles en la base tiene "encima" un montón con una base de j barriles, donde $0 \le j \le n-1$. Una vez elegido j y decidido que tipo de montón es (de los M_j posibles), solo queda colocarlo: si $j = 0$, no tenemos elección (y queda únicamente la fila original); pero si $j \neq 0$, el lector puede comprobar que hay $n-j$ posibles posiciones. Así que

$$\boxed{M_n = 1 + \sum_{j=1}^{n-1}(n-j)M_j} \qquad \text{para cada } n \ge 2.$$

Más adelante (véase el ejemplo 10.4.4), y ya con funciones generatrices, deduciremos que M_n es, simplemente, el número de Fibonacci F_{2n-1}, para cada $n \ge 1$. ♣

Ejemplo 6.1.12 *Los números de Bell.*

El número de Bell $B(n)$ cuenta, como ya vimos en la subsección 3.3.1, el número total de particiones de $\{1, \dots, n\}$ en bloques no vacíos: $B(1) = 1$, $B(2) = 2$, $B(3) = 5$, etc. Queremos escribir una recurrencia para $B(n+1)$ (algo que pedíamos hacer en el ejercicio 3.3.3). Fijémonos en un bloque especial, el que contiene al elemento $n+1$. Este bloque estará formado, además de por el $n+1$, por un cierto subconjunto de $\{1, \dots, n\}$. Llamemos $n-k$ al tamaño de ese subconjunto, donde $0 \le k \le n$ (obsérvese que tanto $k = 0$ como $k = n$ están permitidos). Un subconjunto de ese tamaño puede ser elegido de $\binom{n}{n-k}$ maneras distintas. Una vez decididos qué elementos acompañan a $n+1$ en su bloque, basta partir en bloques los k elementos restantes. De todo esto se deduce que, para cada $n \ge 1$,

$$B(n+1) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{n-k} B(k) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{B(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(k)} \quad \text{para cada } n \ge 0.$$

A la derecha hemos decidido, por convenio (y comodidad), que $B(0) = 1$. ♣

4. Mirando lejos

En los ejemplos vistos hasta aquí, el cálculo de un término de la sucesión requiere el conocimiento del anterior, de los dos anteriores... e incluso de todos los anteriores. Pero a veces la recurrencia es más caprichosa, y exige buscar el término que esté un cierto número de posiciones antes, o todas las de un cierto bloque anterior de la sucesión.

Ejemplo 6.1.13 *Un algoritmo para calcular el máximo y el mínimo de n números.*

La estrategia que seguiremos se inscribe dentro de los procedimientos de "divide y vencerás", de los que ya hemos visto algún ejemplo anteriormente: las multiplicaciones de números o matrices de las secciones 4.5 y 4.4, o la Transformada rápida de Fourier de la subsección 4.6.5. Partimos de una lista de n números $(a_1, \dots, a_n)$ y queremos determinar el mayor y el menor de ellos utilizando comparaciones entre pares de números. Para cada $n \ge 2$, vamos a llamar C_n al número de comparaciones necesarias para determinar el máximo y el mínimo de los n números siguiendo el procedimiento que pasamos a describir.

Vamos a analizar primero el caso en el que n es un número par. El primer caso, algo especial, es $C_2 = 1$, pues basta con hacer una comparación para determinar cuál de los dos números es mayor y cuál menor. Si n es un número par ≥ 4, partimos la lista exactamente por la mitad. Para obtener el máximo y el mínimo de los n números, determinamos primero el máximo y el mínimo de cada uno de los bloques, y luego comparamos el máximo de los dos bloques (una comparación) y el mínimo de los dos (otra comparación). Así que

$$C_n = C_{\frac{n}{2}} + C_{\frac{n}{2}} + 2 \qquad \text{para cada } n \text{ par} \geq 4.$$

Para el caso de longitud n impar, de nuevo $n = 3$ es especial, y el resultado es $C_3 = 3$. El argumento general, para $n = 2k + 1 \geq 5$ es como el de antes, con la salvedad de que ahora debemos cortar en un bloque de k números y otro de $k+1$. Si el lector completa el argumento para este caso y reúne los dos, llegará a la fórmula general siguiente:

$$\boxed{C_n = C_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + C_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + 2} \qquad \text{para cada } n \geq 4,$$

que junto con los valores $C_2 = 1$ y $C_3 = 3$ permite obtener la sucesión (C_n) completa. ♣

Ejemplo 6.1.14 *Los números de Leibniz.*

Escribimos los números naturales en base 2:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\cdots$
0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111	$\cdots$

y sumamos los dígitos de esos desarrollos binarios. Llamemos $L(n)$ al resultado de esas sumas:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\cdots$
$L(n)$	0	1	1	2	1	2	2	3	1	2	2	3	2	3	3	4	$\cdots$

Figura 6.2: Leibniz

Se cuenta que fue Leibniz el que primero se fijó en la sucesión $(L(n))$ mientras esperaba a ser recibido en audiencia por el Papa, a quien iba a plantear una propuesta para unificar las distintas iglesias cristianas[9]. Obsérvese que si, para un cierto k, $n < 2^k$, entonces los desarrollos binarios de n y $n + 2^k$ coinciden excepto en la primera posición: $n + 2^k$ llevaría un 1 y a n le podemos poner un 0. De manera que

$$\boxed{L(n + 2^k) = L(n) + 1}$$

si $0 \leq n < 2^k$. Así que para calcular el valor de $L(n + 2^k)$ necesitamos mirar al número $L(n)$, que está mucho antes en la sucesión.

[9]Los matemáticos de antaño tenían intereses muy diversos. En todo caso, curiosa manera de preparar una entrevista para un asunto de tan aparente trascendencia. Gottfried Leibniz (1646-1716), el matemático y filósofo alemán protagonista de este chascarrillo, es considerado, junto con Newton, el inventor del Cálculo. Leibniz inventó notaciones que han llegado a nuestros días, como dx o el símbolo $\int$, y reglas (que hoy llevan su nombre) como la de diferenciación de productos. Para 1676 había completado su formulación del Cálculo, incluyendo el Teorema Fundamental. Newton había desarrollado su método de fluxiones en 1671, aunque su trabajo no fue publicado hasta 1736, y acusó a Leibniz de plagio. Una polémica histórica: ¿quién fue antes? Fuera quien fuera, parece claro que ambos llegaron a sus conclusiones de manera independiente y que, por supuesto, ambos merecen una posición destacada en el Olimpo matemático.

Veamos cómo se generan recursivamente los valores de la sucesión: los vamos a agrupar dependiendo del bloque diádico $[2^k, 2^{k+1})$ al que pertenezcan. Empezamos con

$$(L(0), L(1)) = (0, 1)$$

y entonces

$$\big(L(2), L(3)\big) = \big(L(0+2), L(1+2)\big) = \big(L(0)+1, L(1)+1\big) = \big(0, 1\big) + \big(1, 1\big) = \big(1, 2\big)\,.$$

El siguiente bloque se obtendría

$$\begin{aligned}\big(L(4), &L(5), L(6), L(7)\big) = \big(L(0+4), L(1+4), L(2+4), L(3+4)\big)\\ &= \big(L(0)+1, L(1)+1, L(2)+1, L(3)+1\big) = \big(0,1,1,2\big) + \big(1,1,1,1\big) = \big(1,2,2,3\big)\,.\end{aligned}$$

El procedimiento es sencillo: para calcular los de un bloque diádico, tomamos la lista de *todos* los anteriores y les sumamos, a cada uno de ellos, 1. Por ejemplo, el siguiente bloque sería

$$\begin{aligned}&(L(8), L(9), L(10), L(11), L(12), L(13), L(14), L(15)) =\\ &= (L(0), L(1), L(2), L(3), L(4), L(5), L(6), L(7)) + (1,1,1,1,1,1,1,1) = (1,2,2,3,2,3,3,4).\end{aligned}$$

Obsérvese que estos números cumplen además que

$$\boxed{L(2n) = L(n)}\,,$$

porque multiplicar por 2 significa rodar los coeficientes del desarrollo binario de n una unidad, añadir un cero a la derecha: por ejemplo, $7 = (101)_2$ y $14 = (1010)_2$; $31 = (11111)_2$ y $62 = (111110)_2$. La identidad anterior es también una recurrencia para la sucesión (L_n). ♣

5. Ecuaciones con dos parámetros

En el capítulo 3 analizamos diversas familias de números que dependen de dos parámetros: coeficientes binómicos, números de Stirling de primera y segunda especie, número de particiones de un entero en un cierto número de partes, etc. Para cada uno de ellos, encontramos relaciones de recurrencia y valores iniciales que permitían calcularlos. Por recordarlos, veamos un par de casos.

Ejemplo 6.1.15 *Coeficientes binómicos y números de Stirling de segunda especie.*

El número de subconjuntos de tamaño k que se pueden extraer del conjunto $\{1, \ldots, n\}$, $C(n, k)$, satisface la recurrencia doble

$$\boxed{C(n, k) = C(n-1, k) + C(n-1, k-1)}$$

para cada $n \geq 1$ y para cada $k \geq 1$. Las condiciones iniciales son las de los bordes del triángulo de Tartaglia: $C(n, 0) = 1$, para todo $n \geq 0$ y $C(n, n) = 1$, para todo $n \geq 0$. Disponemos, además, de una fórmula cerrada para estos números:

$$C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,,$$

válida para cada $n, k \geq 0$. Sobre lo eficaz que resulta el cálculo con la fórmula o con la recurrencia ya reflexionamos en la subsección 3.1.1.

Cuando contábamos el número de particiones en k bloques no vacíos del conjunto $\{1, \dots, n\}$, obteníamos los números de Stirling de segunda especie, $S(n, k)$, que satisfacían la relación

$$\boxed{S(n,k) = kS(n-1,k) + S(n-1,k-1)}$$

junto con los valores frontera $S(n,n) = 1$ y $S(n,1) = 1$. También en esta ocasión tenemos una "fórmula":

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j \binom{k}{j}(k-j)^n\,,$$

algo complicada, en todo caso. ♣

6. Sistemas de ecuaciones

A veces, asociado a un cierto parámetro, digamos n, tenemos dos (o más) sucesiones de números. Calcular un término de una de estas sucesiones puede involucrar, tanto a términos de su propia sucesión, como a términos de la otra (u otras). En estos casos, tendremos un sistema de ecuaciones de recurrencia.

Ejemplo 6.1.16 *Calculemos a_n, el número de listas de longitud n con ceros y unos con un número* par *(o cero) de ceros.*

Como es igualmente probable el que aparezca un número par o un número impar de ceros, la intuición nos dice que $a_n = 2^n/2 = 2^{n-1}$. Pero veamos. Nos fijamos en el símbolo que puede aparecer en la última posición: si es un 1, el resto de la lista no es sino una de longitud $n-1$ con ceros y unos con un número par de ceros (de las que hay a_{n-1}). Pero si aparece un 0, lo que queda es una lista de longitud $n-1$ con un número *impar* de ceros.

¡Vaya!, mezclamos aquí otro tipo de objetos. Inventemos un nombre para ellos y veamos cómo salimos del aprieto. Si llamamos b_n, al número de n-listas de ceros y unos con un número impar de ceros, podremos establecer la biyección que aparece a la derecha, que nos dice que, para $n \ge 1$,

$$a_n \to \begin{cases} \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{número par de ceros}}\ \boxed{1} & \longleftrightarrow a_{n-1} \\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{número impar de ceros}}\ \boxed{0} & \longleftrightarrow b_{n-1} \end{cases}$$

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1}\,,$$

siendo los valores iniciales $a_1 = b_1 = 1$. Pero como hemos introducido una nueva (sucesión) incógnita, se hace necesario establecer una ecuación para ella. Con un razonamiento análogo al anterior, pero ahora para las listas que cuenta b_n, llegamos al siguiente **sistema de ecuaciones de recurrencia**,

$$(*)\quad \begin{cases} a_n = a_{n-1} + b_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} + b_{n-1}. \end{cases} \qquad \text{o bien} \qquad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}.$$

A la derecha hemos escrito el sistema en forma matricial; como veremos en la subsección 6.2.3, las técnicas del Álgebra Lineal, como el cálculo de autovalores y la diagonalización, son las herramientas adecuadas para la resolución del problema. Obsérvese, de todas formas, que este ejemplo tan sencillo se puede resolver "a mano". De $(*)$ deducimos que $a_n = b_n$. Además, $a_n + b_n$ es el número total de listas, 2^n. De donde obtenemos que $a_n = 2^{n-1}$ para cada n. ♣

7. Desdoblamiento

En ocasiones, una sucesión de números obedece a varias ecuaciones de recurrencia; o, más bien, en la sucesión conviven varias subsucesiones (por ejemplo, los términos de índice par y los de índice impar), cada una de las cuales tiene su propia ecuación.

Ejemplo 6.1.17 *Queremos calcular la integral* $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}$, *para cada entero* $n \geq 0$.

Para calcular J_0 usamos el cambio de variables $x = \operatorname{sen}(t)$:

$$J_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{\cos(t)}\,dt = \frac{\pi}{2}\,.$$

La integral J_1 es aún más sencilla:

$$J_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 = 1\,.$$

La relación de recurrencia se obtiene integrando por partes, como en el ejemplo 6.1.4: elegimos

$$\left\{\begin{array}{rclrcl} u &=& x^{n-1}\,, & du &=& (n-1)\,x^{n-2}\,; \\ dv &=& \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,, & v &=& -\sqrt{1-x^2}\,, \end{array}\right.$$

para obtener que, para $n \geq 2$,

$$J_n = -x^{n-1}\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 + (n-1)\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}\,dx = (n-1)\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}\,dx\,.$$

Parece que nos hemos salido de la familia de integrales J_k; pero un sencillo truco nos permite volver a ella:

$$\begin{aligned} J_n &= (n-1)\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}\,dx = (n-1)\int_0^1 x^{n-2}\,\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ &= (n-1)\underbrace{\int_0^1 \frac{x^{n-2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx}_{J_{n-2}} -(n-1)\underbrace{\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx}_{J_n}\,. \end{aligned}$$

Reordenando términos llegamos a que

$$J_n = \frac{n-1}{n}\,J_{n-2}\,, \quad \text{para cada } n \geq 2.$$

Esta recurrencia es fácil de resolver, basta iterarla. Observemos que los términos pares y los impares forman dos sucesiones independientes. Por ejemplo, en el caso par, $n = 2k$,

$$J_{2k} = \frac{2k-1}{2k}\,J_{2k-2} = \frac{(2k-1)(2k-3)}{(2k)(2k-2)}\,J_{2k-4} = \cdots = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}{(2k)(2k-2)\cdots 4\cdot 2}\,\underbrace{J_0}_{=\pi/2}\,.$$

Multiplicando numerador y denominador por los factores pares que faltan, llegamos a que

$$J_{2k} = \frac{(2k)!}{(2k\,(2k-2)\cdots 4\cdot 2)^2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{(2k)!}{(2^k\,k\,(k-1)\cdots 2\cdot 1)^2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{(2k)!}{(2^k\,k!)^2}\,\frac{\pi}{2} = \binom{2k}{k}\frac{\pi}{2^{2k+1}}\,.$$

Una manipulación parecida llevó a Wallis a una fórmula para estimar el valor de π (véase la subsección 2.4.4). Y en el caso impar, $n = 2k+1$,

$$J_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1}\,J_{2k-1} = \frac{(2k)(2k-2)}{(2k+1)(2k-1)}\,J_{2k-3} = \cdots = \frac{(2k)(2k-2)\cdots 4\cdot 2}{(2k+1)(2k-1)\cdots 5\cdot 3}\,\underbrace{J_1}_{=1}\,.$$

Reescribiendo adecuadamente los factores, obtenemos que

$$J_{2k+1} = \frac{\big(2^k\,k!\big)^2}{(2k+1)!} = \frac{2^{2k}}{2k+1}\,\frac{1}{\binom{2k}{k}}\,.$$

Obsérvese que se tiene que

$$J_{2k}\,J_{2k+1} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{2k+1}\,,$$

de manera que bastaría calcular una de las dos sucesiones. ♣

8. Modelos dinámicos discretos

Es frecuente que el análisis de cómo evoluciona una cierta cantidad en el tiempo nos permita especificar la tasa de variación por unidad de tiempo. Esta información da lugar, de manera natural, a una ecuación de recurrencia, como ilustramos en los siguientes dos ejemplos.

Ejemplo 6.1.18 *Sobre tipos de interés y préstamos.*

¿Sabe el lector realmente cómo se devuelve un préstamo o cómo se amortiza una hipoteca? En la escritura de un préstamo hipotecario, allá por las últimas páginas, aparece una fórmula algo misteriosa que determina, en función de los parámetros del contrato (vencimiento, tipo de interés, etc.), el pago mensual al que nos comprometemos. ¿De dónde sale esa fórmula? Por si el lector no está ducho en la materia, empezaremos con una pequeña introducción a las nociones de tipo de interés y capitalización.

El **interés** es la cantidad que se percibe por un préstamo de dinero en un periodo de tiempo. Tras ese periodo de tiempo, una unidad de dinero, digamos un euro, se transforma en

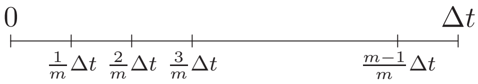
$$1 \quad\longrightarrow\quad 1+I \quad \text{(capital + intereses)}.$$

Si la cantidad inicial es de, por ejemplo, M euros, tras el periodo de tiempo, se tendrán $M(1+I)$ euros. La cantidad I es el **tipo de interés**, el interés percibido por un préstamo de una unidad de dinero[10].

[10]Es conveniente señalar que el tipo de interés que consideraremos aquí está expresado en tantos por uno. Es frecuente que un tipo de interés se exprese también en tantos por ciento, así que habrá que hacer la conversión correspondiente. Por ejemplo, un tipo de interés $I = 0{,}1$ en tantos por 1 es lo mismo que uno del 10 %.

Un método de **capitalización** es un contrato que contiene unas reglas de acumulación de pagos de intereses sobre un capital dado. Para especificar un contrato de capitalización (compuesta) se requieren los siguientes datos:

- un periodo de tiempo Δt (normalmente, un año),
- un tipo de interés R (en tantos por uno) asociado a ese periodo de tiempo;
- y una frecuencia de capitalización, m (generalmente, un divisor de 12 o incluso $m = \infty$).



En un contrato como éste decimos que capitalizamos cada $\Delta t/m$. Por ejemplo, podríamos tener un contrato con un tipo de interés R anual y una frecuencia de capitalización mensual; esto correspondería a tomar $\Delta t = 1$ año y $m = 12$. La regla de capitalización asociada a los tres datos del contrato significa que

- en tiempo 0, el capital es C.
- En tiempo $\Delta t/m$, el capital acumulado sería $C\left(1 + \frac{R}{m}\right)$, el correspondiente al interés producido por el tipo de interés (que está asociado a Δt) durante ese periodo de tiempo.
- En tiempo $2\,\Delta t/m$, el capital acumulado sería $C\left(1 + \frac{R}{m}\right)^2$, porque aplicamos la regla de interés al capital acumulado hasta el vencimiento anterior.
- Así calcularíamos el valor del capital en cada instante intermedio. En tiempo Δt, el valor del capital sería $C\left(1 + \frac{R}{m}\right)^m$, pues hemos efectuado m capitalizaciones sucesivas.
- La capitalización podría ir más allá. Por ejemplo, el capital en tiempo $2\,\Delta t = 2m\,(\Delta t)/m$ sería $C\left(1 + \frac{R}{m}\right)^{2m}$. En general, el valor en tiempo t, donde t es un múltiplo de $\Delta t/m$,

$$t = k\,\frac{\Delta t}{m}, \qquad \text{sería} \quad C\left(1 + \frac{R}{m}\right)^k.$$

Amortización de un préstamo. Pasemos al problema que nos interesa, el análisis de cómo se devuelve un préstamo. Un banco nos presta una cantidad V y tenemos N años para devolverlo. Por supuesto, tendremos que pagar unos intereses, que siguen una regla de una composición mensual con tipo de interés anual R. Es decir, cada mes pagaremos un interés (que calcularemos con R) por la cantidad de dinero que debamos en ese momento al banco; y además querremos ir devolviendo el capital prestado.

El método más habitual en los préstamos hipotecarios es el llamado **sistema francés**, en el que se paga una cantidad fija P cada mes. Con el resto de los datos del contrato, queremos calcular cuál es el montante de ese pago mensual fijo. Llamemos D_n a la deuda que mantenemos con el banco tras n meses:

- En el instante inicial, debemos la cantidad total, $D_0 = V$.
- Tras el pago del primer mes, $D_1 = V\left(1 + \frac{R}{12}\right) - P$, porque se han acumulado unos intereses y hemos realizado un pago de P.
- Tras el segundo mes, $D_2 = D_1\left(1 + \frac{R}{12}\right) - P$; ahora acumulamos intereses sobre la deuda que manteníamos con el banco.

- En un mes cualquiera, la deuda con el banco será el resultado de restar a la deuda del mes anterior (más los intereses correspondientes) el pago fijo de P. Esto es,

$$D_n = D_{n-1}\left(1+\frac{R}{12}\right) - P \qquad \text{para cada } n \geq 1.$$

- Al terminar el contrato $D_{12\,N} = 0$.

Llamemos, por comodidad, $a = 1 + R/12$. Queremos resolver

$$\boxed{D_n = a\,D_{n-1} - P} \quad \text{para } n \geq 1\,, \quad \text{junto con la condición inicial } D_0 = V.$$

Disponemos además de la condición extra $D_{12\,N} = 0$, que como veremos nos permitirá obtener el valor de P. De nuevo resolvemos la ecuación de recurrencia por iteración:

$$\begin{aligned} D_n &= a\,D_{n-1} - P = a\,(a\,D_{n-2} - P) - P = a^2\,D_{n-2} - aP - P = a^3 D_{n-3} - a^2 P - aP - P \\ &= \cdots = a^n D_0 - P(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a^2 + a^1 + 1) = a^n D_0 - P\,\frac{a^n - 1}{a-1}\,, \end{aligned}$$

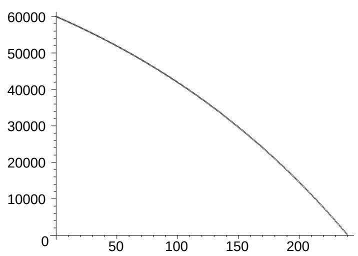
donde hemos utilizado la fórmula de la suma de una progresión geométrica finita. Como $D_0 = V$ y $a = 1 + R/12$, tras unas cuantas manipulaciones llegamos a que

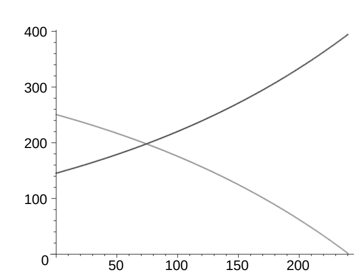
$$D_n = \frac{12}{R}\,P + \left(1+\frac{R}{12}\right)^n \left[V - \frac{12}{R}\,P\right].$$

Utilizando que $D_{12\,N} = 0$, el lector podrá obtener que el valor de P es

$$P = V\,\frac{R}{12}\left[\frac{1}{1-(1+R/12)^{-12\,N}}\right].$$

En cada mes, parte del pago P se destina al pago de los intereses, y otra parte a la amortización de capital. Estos repartos varían durante la vida del préstamo. Sea I_n a la cantidad invertida en intereses y C_n la destinada a capital, de manera que $P = I_n + C_n$. En el mes n se pagan los intereses generados desde el último pago, esto es, $I_n = D_{n-1}\,R/12$.





Animamos al lector a que obtenga las expresiones explícitas de I_n y C_n a partir de las de D_n y P. Si, por ejemplo, el montante del préstamo es de $V = 60000$ euros, se devuelve en $n = 20$ años y el tipo de interés anual es $R = 0{,}05$, el pago mensual (fijo) resulta ser $P = 395,97$ euros. Las gráficas de la izquierda muestran cómo va disminuyendo la deuda con el banco a lo largo de los 240 meses de vida del préstamo (gráfica superior) y qué parte del pago mensual se destina a intereses y qué parte a capital (gráfica inferior; como es bien sabido, al principio pagamos sobre todo intereses) El lector podrá extraer conclusiones sobre la conveniencia de esa práctica, tan habitual, de cancelar el préstamo cuando está próximo al vencimiento. Existen otros sistemas de amortización de préstamos, que explicamos en los ejercicios 6.1.4 y 6.1.5. ♣

Ejemplo 6.1.19 *Cómo se administran medicamentos.*

Para tratar una cierta enfermedad tomamos una cantidad fija C de medicamento cada N horas. Buscamos un modelo matemático que permita determinar los valores de los parámetros C y N para que (1) la cantidad de medicamento en el organismo no supere nunca un cierto umbral de toxicidad B; y (2) que esa cantidad de medicamento siempre esté por encima de un umbral de eficacia A, por debajo del cual el medicamento no surte efecto.

Tras cada N horas, sólo una fracción d (un número entre 0 y 1) de la cantidad de medicamento presente en el organismo se mantiene; el resto desaparece. Digamos que esta eliminación sigue un modelo de *decaimiento exponencial*: si en un cierto momento hay una cantidad D de medicamento, tras un tiempo t sólo quedará $D\,e^{-k\,t}$, donde $k > 0$ es una cantidad (la constante de decaimiento) que dependerá de diversos factores y que supondremos conocida. Esto supone que, en realidad, d no es un nuevo parámetro, sino que está relacionado con N mediante $d = e^{-kN}$. Si N muy grande, es decir, las tomas están muy espaciadas, entonces d será muy cercano a 0, y casi todo el medicamento desaparecerá entre una toma y la siguiente. Vamos a suponer, por simplicidad, que el paso del medicamento al torrente sanguíneo es instantáneo. Las tomas se producen en tiempos $t_0, t_1, t_2, \ldots$, separadas cada N horas. Llamaremos y_n e x_n, respectivamente, a las cantidades de fármaco en sangre *justo antes* e *inmediatamente después* de la toma de tiempo t_n.

Los números y_n cumplen que

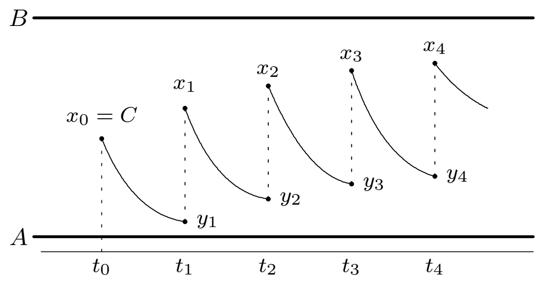
$$\boxed{y_n = d\,x_{n-1}} \qquad \text{para cada } n \geq 1,$$

porque sólo se mantendrá una fracción d de la cantidad presente tras la toma anterior. Asimismo, se cumple que $x_n = y_n + C$ para cada $n \geq 1$ y, por tanto,

$$\boxed{x_n = d\,x_{n-1} + C},$$

ecuación que se resuelve por simple iteración (y utilizando que $x_0 = C$). Dejamos al lector la comprobación de que las fórmulas correspondientes son

$$y_n = C\,\frac{d - d^{n+1}}{1-d} \qquad \text{y} \qquad x_n = C\,\frac{1 - d^{n+1}}{1-d} \qquad \text{para cada } n \geq 1.$$



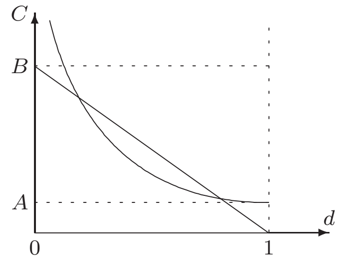
Nuestro objetivo es elegir valores de los parámetros C (cantidad en cada toma) y de N (periodo de tiempo entre tomas; recuérdese que fijar N equivale a especificar d) de manera que, como se muestra en el dibujo de la izquierda, la cantidad de medicamento en sangre se mantenga siempre entre los dos límites A y B (por supuesto, C ha de estar ya en el rango adecuado).

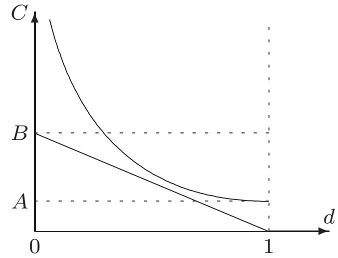
El asunto es más delicado de lo que pudiera parecer. Observemos que ambas sucesiones, (x_n) e (y_n), son crecientes, pues $d < 1$, y necesitamos que, para cada n,

$$x_n = C\,\frac{1 - d^{n+1}}{1-d} \leq B \qquad \text{y que} \qquad y_n = C\,\frac{d - d^{n+1}}{1-d} \geq A\,.$$

La condición de la derecha se cumplirá si el primero de los y_n, esto es, $y_1 = dC$, lo hace. Para la de la izquierda, será suficiente con exigir que se cumpla para el "último" de los x_n, esto es, para el $\lim_{n\to\infty} x_n$, que vale $C/(1-d)$. Así que debe cumplirse que

$$\frac{C}{1-d} \le B \quad \text{y} \quad dC \ge A \quad \Longrightarrow \quad \frac{A}{d} \le C \le B(1-d)\,.$$





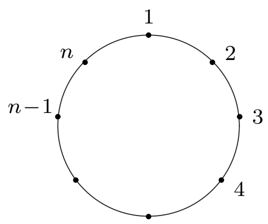
Y esto no es siempre posible. La región del plano (d, C) determinada por la doble desigualdad anterior es la encerrada entre las gráficas de A/d y $B(1-d)$... ¡y esa región bien pudiera ser vacía! En los dibujos observamos las dos posibilidades: si B está cercano a A, el problema no tiene solución.

Un análisis más detallado, que dejamos como ejercicio 6.1.6 al lector, nos dice que tendremos toda una región de pares de valores (d, C) admisibles para el sistema siempre que[11] $B \ge 4A$. Lo que nos permite diseñar la estrategia de tomas (decidiendo el tiempo entre tomas o fijando la cantidad de medicamento por toma). El ejercicio 6.1.6 también contiene estos detalles. ♣

9. Una estrategia de supervivencia

Cerramos esta sección con un ejemplo, algo inclasificable, en el que aparecen muchas de las técnicas y argumentos que hemos visto hasta aquí.

Ejemplo 6.1.20 *El problema de Josefo.*



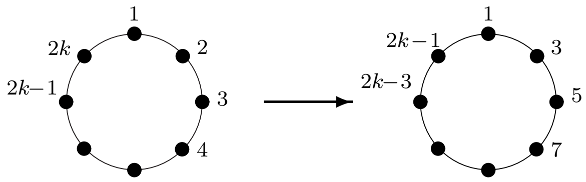
El que vamos a explicar a continuación es, quizás, uno de los primeros problemas combinatorios de la Historia, una variación sobre el problema original que preocupaba a Flavio Josefo[12]. Tenemos n personas sentadas a una mesa circular y vamos eliminando a la **segunda** persona que nos vayamos encontrando en el sentido de las agujas del reloj (empezando a contar desde la primera posición), hasta que sólo una sobreviva. El desafío, por supuesto, es calcular la posición inicial, que llamaremos $J(n)$, que debe ocupar una persona si quiere sobrevivir. Instamos al lector inquieto a que se entrene calculando a mano los primeros casos:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	$\cdots$
$J(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1	$\cdots$

[11] La *ratio* entre B y A depende del medicamento en cuestión, y en los casos reales puede llegar a ser de tan solo 2 a 1 (aquí estamos exigiendo 4 a 1). Aunque esta razón se puede reducir si nos damos un grado de libertad extra, como es el que la primera toma sea especial (y algo mayor, por ejemplo).

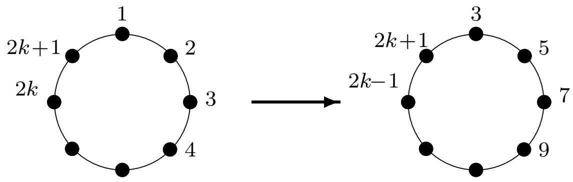
[12] El historiador judío Flavio Josefo (37-*circa* 100) participó en la revuelta contra Roma del año 66 y escapó a la matanza que tuvo lugar después de la toma de la ciudadela de Josapata. Se cuenta, quizás ya con un tono algo legendario, que 41 rebeldes fueron cercados por las tropas romanas y que, antes de ser capturados, optaron por el suicidio colectivo. Sólo Josefo y otro compañero no parecían muy convencidos de la utilidad del sacrificio, así que nuestro personaje propuso el siguiente sistema de inmolación: sentados a una mesa circular, se iría eliminando a cada tercera persona hasta que sólo dos sobrevivieran. Estos dos últimos deberían ser los últimos en morir. Josefo calculó las posiciones que debían ocupar él y un compañero para sobrevivir al proceso.

Obsérvese que todas las “posiciones de supervivencia” son impares (como corresponde a que en la primera pasada eliminamos todas las posiciones pares). La tabla parece sugerir un cierto patrón (de bloques diádicos) en esas posiciones de supervivencia.



Empezamos con el caso par, con $n = 2k$ personas. Queremos evaluar $J(2k)$. En la primera pasada eliminamos a todas las personas que ocupen posiciones pares, como se muestra en la figura. Queda una configuración con k personas, aunque ahora no numeradas de 1 a k. Si estuvieran “bien” numeradas, la posición de supervivencia vendría dada directamente por $J(k)$. Observemos que la posición 2 ahora está etiquetada con 3, la 3 con 5, la 4 con 7, la 5 con 9, etc. Esto es, hemos doblado cada posición y le hemos restado 1. Si m es la posición superviviente con el orden $(1, 2, \dots, k)$ (de manera que $m = J(k)$), con el nuevo etiquetado $(1, 3, 5, \dots, 2k-1)$ el superviviente será $2m - 1$. Así llegamos a que

$$(*) \qquad \boxed{J(2k) = 2\,J(k) - 1}\,, \qquad \text{para cada } k \geq 1.$$



El caso impar, $n = 2k + 1$, es análogo. Ahora la primera pasada elimina a las personas que ocupan posiciones pares, y aún sobreviven $k+1$ personas. Observamos también que la siguiente víctima es la que ocupaba la posición 1. Tras estos pasos, nos queda la configuración de la figura. Con argumentos análogos a los de antes (cuyos detalles dejamos al lector) establecemos que, para cada $k \geq 1$,

$$(**) \qquad \boxed{J(2k+1) = 2\,J(k) + 1}\,.$$

Las reglas $(*)$ y $(**)$, junto con el valor $J(1) = 1$, permiten generar la sucesión $(J(n))$. En general, la simple iteración de estas dos expresiones no permite hallar una fórmula explícita para $J(n)$, pues en cada paso hay que comprobar la paridad de los sucesivos valores que vamos encontrando. Aunque si, por ejemplo, n fuera una potencia de 2, digamos $n = 2^m$, entonces el lector podrá comprobar, por simple iteración, que $J(2^m) = 1$.

Pero, ¿y si escribimos n en binario, $n = (a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0)_2$, donde los $a_j \in \{0, 1\}$ y $a_k = 1$? Si n es par (esto es, si $a_0 = 0$), la relación $(*)$ requiere calcular el número de Josefo en $n/2$, cuya expresión binaria es $(a_k, a_{k-1}, \dots, a_2, a_1)_2$ (sólo hay que eliminar la última cifra del desarrollo binario). Por otro lado, si n es impar, $(**)$ nos conduce a $(n-1)/2$, cuya expresión en binario, como puede comprobar el lector, es también $(a_k, a_{k-1}, \dots, a_2, a_1)_2$.

En estos nuevos términos, la relación de recurrencia se simplifica notablemente:

$$J\left((a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0)_2\right) = 2\,J\left((a_k, a_{k-1}, \dots, a_1)_2\right) + (-1)^{a_0+1}\,,$$

pues sumamos ± 1 dependiendo del valor de a_0. Iterando esta regla y utilizando que $a_k = 1$, el lector podrá llegar a que, si $(a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0)_2$ es la expresión en binario de n, entonces

$$J\left((a_k, \dots, a_0)_2\right) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{a_j+1}\, 2^j\,. \qquad \clubsuit$$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 6.1

6.1.1 *Este ejercicio hace referencia a la sucesión de números de Leibniz $(L(n))$ del ejemplo 6.1.14.*

(a) Compruébese, recordando la discusión de la subsección 4.2.4, que $\#\{k \le n : \binom{n}{k}$ *es impar*$\} = 2^{L(n)}$.

(b) Compruébese, por inducción, que si $n \ge 0$, entonces $\displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1} 2^{L(k)} = 3^n$.

6.1.2 *Sea* $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x dx,\ n \ge 0.$

(a) Compruébese que $I_0 = e - 1$ y obténgase que $I_n = e - nI_{n-1}$, para cada $n \ge 1$.

(b) Para resolver la recurrencia anterior, consideramos los números $J_n = (-1)^{n+1} I_n/(n!\, e)$, para cada $n \ge 0$, que como podrá comprobar el lector, verifican que

$$J_n = J_{n-1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \qquad \text{para cada } n \ge 1.$$

Resuélvase esta recurrencia para obtener una fórmula para J_n y la correspondiente fórmula para I_n.

6.1.3 *Definamos* $H_n = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t} \sin^n(t) dt$. *Compruébese que $H_0 = 1$ y $H_1 = 1/2$, y que*

$$H_n = \frac{n(n-1)}{1+n^2}\, H_{n-2}, \qquad \text{para cada } n \ge 2.$$

Dedúzcanse las fórmulas para las integrales de índice par H_{2k} y las de índice impar H_{2k+1}.

6.1.4 *Este ejercicio y el siguiente utilizan los términos del ejemplo 6.1.18. En un sistema alternativo de amortización de préstamos, cada mes se paga una cantidad P_n, con la que se pagan los intereses I_n generados en el periodo anterior y se amortiza una cantidad fija C de capital: $P_n = I_n + C$, para $n \ge 1$. Ahora el pago mensual no es fijo, sino que va decreciendo con el tiempo.*

(a) Obténgase una fórmula para D_n, la deuda con el banco en el mes n. Dedúzcase, de la condición $D_{12\,N} = 0$, el valor de C.

(b) Con estas expresiones, obténganse los valores de I_n y de P_n. Dibújese la gráfica de los pagos de intereses y capital para los datos $R = 0{,}05$, $N = 20$ años y $V = 10$ millones de euros.

6.1.5 *Una tercera forma de amortización es el llamado* ***sistema americano****. Dados los datos R, V y N como antes, se devuelve toda la deuda y sus intereses en un único pago al final del contrato. Esto es, se hace un pago en el mes $12\,N$ de*

$$P_{\text{final}} = V\left(1 + \frac{R}{12}\right)^{12\,N}.$$

Para acumular ese capital se crea un fondo al que se contribuye con una cantidad fija P cada mes; este dinero se capitaliza mensualmente con un tipo de interés anual S (generalmente, distinto de R). Se pide establecer una fórmula para A_n, el capital acumulado tras la aportación del mes n. Y, con la condición de que $A_{12\,N} = P_{\text{final}}$, obtener el valor de P.

6.1.6 *Estamos con el modelo de toma de medicamentos explicado en el ejemplo 6.1.19.*

(a) Hállense los rangos de los parámetros d y C en los que mantendremos la cantidad de medicamento entre los límites A y B. Compruébese que si $B \ge 4A$, estos rangos realmente existen.

(b) Supongamos que $A = 3$ *y* $B = 16$*. Determínense los rangos para los parámetros* d *y* C*.*

(c) Supongamos que el medicamento está caracterizado por un valor de $k = 0{,}1$*. Si* $C = 10$*, ¿qué rango para* N *sería posible? ¿y cuál sería el rango admisible para* C *si quisiéramos que* $N = 8$ *horas?*

6.1.7 *Estamos con el problema de Josefo del ejemplo 6.1.20. Supongamos que la expresión binaria de* n *es* $(a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0)_2$*, donde* $a_k = 1$*.*

(a) Consideremos el número N *cuya expresión en binario tiene la misma longitud que la de* n *y sus cifras son todo unos; esto es,* $N = \sum_{j=0}^{k} 2^j$*. Calcúlese* $2n - N$ *y compruébese que coincide con* $J(n)$*.*

(b) Dedúzcase de lo anterior que si escribimos $n = 2^k + l$*, con* $0 \le l < 2^k$*, entonces*

$$J(2^k + l) = 2l + 1\,.$$

(c) Aplíquese esta fórmula al cálculo de $J(134)$ *y* $J(1356)$*.*

(d) Dedúzcase que

$$J((a_k, a_{k-1}, \ldots a_1, a_0)_2) = (a_{k-1}, a_{k-2}, \ldots, a_1, a_0, a_k)_2\,,$$

de forma que podemos obtener $J(n)$ *sin más que permutar cíclicamente la expresión binaria de* n*.*

(e) Ciertos números de Josefo cumplen que $J(n) = n/2$*. Es el caso, por ejemplo, de 2, 10, 42, 170, etc. Caracterícense los números para los que esto ocurre.*

6.1.8 *En el problema original de Josefo, se elimina a la tercera persona que vamos encontrando en el sentido de las agujas del reloj. Láncese sin miedo el lector a analizar esta cuestión para descubrir que, si* $n = 41$*, entonces las dos posiciones que sobreviven son la 16 (penúltimo) y la 31 (último).*

6.1.9 *Consideremos una función* $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$*, donde* $\mathcal{X} = \{1, \ldots, N\}$ *(*f *no tiene por qué ser necesariamente una biyección, es decir, una permutación de* $\mathcal{X}$*). Sea* $a_0 \in \mathcal{X}$*. Definimos* $a_1 = f(a_0)$*,* $a_2 = f(a_1)$ *y, en general,* $a_n = f(a_{n-1})$*. Compruébese que existe un* n_0 *y un* k *tales que* $a_{n+k} = a_n$ *para todo* $n \ge n_0$*.*

6.1.10 *Analícense, a la luz del ejercicio anterior, los siguientes sistemas dinámicos para diversos valores de* a_0*:*

(a) El conjunto $\mathcal{X} = \{0, 1, \ldots, 6\}$ *y la función* $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$*, donde* $f(n)$ *es el resto de dividir* $3n$ *por 7.*

(b) Sea $\mathcal{X} = \{0, 1, \ldots, 9999\}$*. La regla* f *es la siguiente: dado* $n \in \mathcal{X}$*, consideramos los números* a *(que tiene las mismas cifras que* n*, pero ordenadas de menor a mayor) y* b *(mismas cifras que* n*, pero de mayor a menor). Finalmente,* $f(n) = b - a$*. Por ejemplo, si* $n = 3075$*, entonces* $a = 0357$ *y* $b = 7530$*, de manera que* $f(n) = 7173$*.*

6.1.11 *Variamos el esquema de reproducción de Fibonacci del ejemplo 6.1.7 de la siguiente forma: los conejos tienen dos parejas de descendientes cuando tienen 2 meses, y tres parejas a partir del tercer mes de vida. Llamemos* a_n *al número de conejos que en el mes* n *tienen 3 meses de vida o más,* b_n *a los que tienen exactamente 2 meses y* c_n *a los de 1 mes. Suponemos que* $c_0 = 1$ *y* $a_0 = b_0 = 0$*. Escríbase una recurrencia (matricial) para* (a_n, b_n, c_n)*.*

6.1.12 *Considérese la sucesión* $(u(n))_{n=1}^{\infty}$ *de signos* ± 1 *dada por la siguiente regla:*

$$u(2n) = u(n)\,, \quad \text{para cada } n \ge 1 \qquad y \qquad u(2n+1) = (-1)^n\,, \quad \text{para cada } n \ge 0.$$

(a) Escríbanse los primeros términos.

(b) Observemos que todo número natural n *se puede escribir de manera única en la forma* $n = 2^r(2s+1)$*, con* $r \ge 0$ *y* $s \ge 0$*, sin más que agrupar los doses de su desarrollo en primos. Compruébese que la regla de recurrencia anterior se puede escribir como sigue:*

$$u(2^r(2s+1)) = (-1)^s\,.$$

6.2. Resolución de ecuaciones de recurrencia

Como el lector podrá imaginar, tras leer la sección anterior, la variedad de ecuaciones de recurrencia que se pueden plantear es inmensa. En la mayoría de las ocasiones, resolverlas es una tarea difícil. En esta sección nos vamos a limitar a estudiar algunos casos particulares, sobre todo las ecuaciones lineales. Hay métodos para resolver otras familias de ecuaciones, pero dado que las funciones generatrices, que introduciremos en el capítulo 10, nos permitirán abordar estos problemas más fácilmente, obviaremos su descripción.

6.2.1. Ecuaciones lineales, homogéneas y con coeficientes constantes

En esta subsección nos interesaremos por las sucesiones $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ que son solución de ecuaciones como la siguiente:

$$(\star) \quad A_0\, a_n + A_1\, a_{n-1} + \cdots + A_k\, a_{n-k} = 0 \quad \text{para cada } n \geq k,$$

donde los $A_0, A_1, \dots, A_{n-k}$ son ciertos números dados, con $A_0, A_k \neq 0$, y $k \geq 1$. Observemos que, de manera muy sintética, estamos representando infinitas condiciones para los términos de la sucesión. Sin pérdida alguna de generalidad, podemos suponer (dividiendo $(\star)$ previamente por A_0) que $A_0 = 1$, así que reescribiremos la ecuación de la siguiente forma:

$$(\star\star) \quad a_n = B_1\, a_{n-1} + B_2\, a_{n-2} + \cdots + B_k\, a_{n-k} \quad \text{para cada } n \geq k,$$

para insistir en que cada término de la sucesión (a partir de un cierto índice) se escribe como combinación **lineal** (con **coeficientes constantes**) de unos cuantos términos "anteriores". Obsérvese cómo $(\star\star)$ es una receta para calcular el término a_n si disponemos de los valores de $a_{n-1}, \dots, a_{n-k}$. La **homogeneidad** a la que nos referimos en el título de la subsección quiere decir que no aparecen términos extra que no dependan de los propios a_j. Esto resulta ser fundamental en el análisis que vamos a hacer. En la subsección 6.2.2 veremos cómo podremos tratar el caso en que aparezcan términos no homogéneos.

El número de términos anteriores involucrados será el **grado** de la ecuación (la que hemos escrito arriba será de grado k). Necesitaremos, además, k condiciones iniciales para que la sucesión "arranque"; en el caso de arriba, los números $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$, los primeros k términos de la sucesión. A partir de ellos, y aplicando $(\star\star)$ reiteradamente, obtendremos todos los valores de (a_n). De todos los que hemos visto en la primera sección de este capítulo, sólo los ejemplos 6.1.1, 6.1.5, 6.1.6, 6.1.7 y 6.1.9 son de este tipo (aunque los ejemplos 6.1.2, 6.1.3, 6.1.18 y 6.1.19 conducían también a ecuaciones lineales con términos no homogéneos, que trataremos en la subsección 6.2.2).

El caso $k = 1$, la **ecuación de primer grado**, es especialmente sencillo, pues para resolverla basta aplicar reiteradamente[13] la regla hasta llegar al valor inicial. Así, si la ecuación es $a_n = B_1\, a_{n-1}$, para cada $n \geq 1$, y el valor inicial es a_0, entonces la solución es $a_n = B_1^n a_0$ para cada $n \geq 0$ (véanse algunas variaciones en el ejercicio 6.2.1).

[13] Como ya hemos hecho en varias ocasiones, incluso permitiendo la presencia de un término extra constante (ejemplos 6.1.3, 6.1.18 y 6.1.19). En realidad podemos "resolver" cualquier ecuación del tipo $x_n = f(n)x_{n-1} + g(n)$, donde $f(n)$ y $g(n)$ son ciertas funciones, por simple iteración. Aunque, como imaginará el lector, excepto en algunos casos especialmente sencillos (véase el ejemplo 6.1.4), las fórmulas que se obtienen son inmanejables.

Así que podemos restringir nuestro estudio al caso $k \geq 2$. Y, de hecho, los ingredientes del análisis general que vamos a desarrollar están ya presentes en el caso de la **ecuación lineal homogénea de segundo orden**, a la que añadimos dos condiciones iniciales:

$$\begin{cases} (*) \qquad \boxed{a_n = \alpha\, a_{n-1} + \beta\, a_{n-2}} \qquad \text{para cada } n \geq 2; \\ a_0 = p\,, \quad a_1 = q\,. \end{cases}$$

Los datos son α, β, p y q, y el objetivo es obtener una fórmula para a_n en términos de n. Aunque conviene recordar que no siempre la fórmula cerrada para la solución es la manera más eficaz de calcular los valores de la sucesión (la ecuación de recurrencia podría ser un mejor método). El interés por obtener una tal fórmula está justificado, además de quizás por razones "estéticas", por que en muchas ocasiones nos permite entender el comportamiento de los a_n (por ejemplo, para n grande) en términos de ciertas cantidades que en un primer vistazo podrían pasar inadvertidas.

Una **solucion** de la ecuación $(*)$ es una sucesión $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ cuyos términos (a partir de a_2) verifiquen la ecuación. La sucesión será solución del problema completo cuando, además, los dos primeros términos, a_0 y a_1, valgan p y q respectivamente. Observe el lector que la ecuación tiene, en principio, infinitas soluciones (una por cada posible elección de valores iniciales a_0 y a_1), pues basta arrancar la sucesión a partir de ese par de valores iniciales (por "arrancar" la sucesión entenderemos fijar dos valores iniciales para a_0 y a_1 y luego utilizar la ecuación $(*)$ para ir obteniendo sucesivamente $a_2, a_3, a_4 \ldots$). *Pero sólo una* de estas sucesiones es, además, solución del problema completo (justamente aquélla para la que $a_0 = p$ y $a_1 = q$)[14].

A. Estructura de las soluciones de la ecuación

La estructura de las (infinitas) soluciones de la ecuación $(*)$ es especialmente interesante. Obsérvese que ser solución de la ecuación nada dice sobre los valores que pudieran tener los dos primeros términos. Todo se debe a las siguientes dos propiedades:

1. Si (a_n) y (b_n) son dos soluciones de $(*)$, entonces la sucesión (c_n) definida mediante $c_n = a_n + b_n$ para cada $n \geq 0$ también lo es, puesto que, para cada $n \geq 2$,
$$\begin{aligned} c_n &= a_n + b_n = \alpha\, a_{n-1} + \beta\, a_{n-2} + \alpha\, b_{n-1} + \beta\, b_{n-2} = \alpha\,(a_{n-1} + b_{n-1}) + \beta\,(a_{n-2} + b_{n-2}) \\ &= \alpha\, c_{n-1} + \beta\, c_{n-2}\,. \end{aligned}$$
2. Análogamente, si (a_n) es solución de $(*)$ y r es un cierto número real fijo, entonces la sucesión (c_n) definida a través de $c_n = r\, a_n$ para cada n también es solución de $(*)$.

Así que el conjunto de soluciones de $(*)$ no es cualquier cosa, sino que tiene estructura, en concreto la de **espacio vectorial**[15]: la *combinación lineal* de sucesiones que sean solución de $(*)$ es una sucesión que sigue siendo solución.

[14] Animamos al lector interesado a que pruebe, utilizando el principio de inducción fuerte, que si dos sucesiones (a_n) y (b_n) son solución de $(*)$ y se cumple que $a_0 = b_0$ y $a_1 = b_1$, entonces $a_n = b_n$ para todo n. Obsérvese que los dos términos que coinciden deben ser consecutivos para que funcione el argumento.

[15] El lector avisado sabrá identificar los conceptos de base y dimensión que aparecerán implícitamente en nuestros argumentos. Si además está versado en la teoría de resolución de ecuaciones diferenciales, muchas de las técnicas que aparecerán en esta sección le resultarán familiares.

Esta observación tiene consecuencias muy relevantes. Digamos que (a_n) y (b_n) son dos soluciones distintas de la ecuación (con más precisión, deben ser *linealmente independientes*, lo que en este caso sólo supone que no deben ser una múltiplo de la otra). Por simplificar el argumento, supongamos que son $(a_n) = (0, 1, \dots)$, la solución que empieza con 0 y 1, y $(b_n) = (1, 0, \dots)$, la que empieza con 1 y 0.

Ahora consideremos otra solución cualquiera de la ecuación, digamos $(c_n) = (c_0, c_1, c_2, \dots)$. Formamos la sucesión (d_n) definida mediante

$$d_n = c_1 a_n + c_0 b_n \qquad \text{para cada } n.$$

Ya sabemos que (d_n) es solución de la ecuación, pues es una combinación lineal de soluciones. Pero, además, sus dos primeros términos coinciden con los de (c_n). Así que ambas sucesiones, (c_n) y (d_n), han de ser la misma.

Si el lector se anima a rehacer el argumento anterior con dos sucesiones (a_n) y (b_n) generales, como pedimos hacer en el ejercicio 6.2.2, llegará a la conclusión de que, si encontramos dos soluciones "distintas" (linealmente independientes), *cualquier otra* solución de la ecuación se puede escribir como combinación lineal de ellas.

B. Forma de las soluciones de la ecuación

Pues ya está, ¿no? Tomamos dos soluciones de la ecuación, por ejemplo dos tan sencillas como las que empiezan, respectivamente, por $(0, 1, \dots)$ y por $(1, 0, \dots)$. Aplicando reiteradamente la ecuación, descubrimos que los primeros términos de estas sucesiones son

$(a_n) \longrightarrow$	0	1	α	$\alpha^2+\beta$	$\alpha^3+2\alpha\beta$	$\alpha^4+3\alpha^2\beta+\beta^2$	$\cdots$
$(b_n) \longrightarrow$	1	0	β	$\alpha\beta$	$\alpha^2\beta+\beta^2$	$\alpha^3\beta+2\alpha\beta^2$	$\cdots$

Y cualquier otra solución de la ecuación se escribirá como combinación lineal de estas dos: su término general será de la forma

$$c_n = A a_n + B c_n\,,$$

donde A y B son dos ciertas constantes (que en realidad quedarán determinadas en cuanto fijemos las condiciones iniciales).

Pero no, éste no es el final de la historia, porque no parece posible que de la expresión anterior podamos extraer una fórmula cerrada y manejable en función del índice n para el término general de una solución cualquiera.

Será, quizás, que no estamos eligiendo bien las dos soluciones "especiales". Recordemos que la única restricción es que han de ser sucesiones que verifiquen la ecuación y que sean "distintas" (linealmente independientes). Pero parece razonable buscar soluciones con cierta estructura.

Podríamos, por ejemplo, buscar soluciones cuyos términos estén en progresión aritmética. Fijamos entonces un primer término a_0 y exigimos que el siguiente sea de la forma $a_1 = a_0 + d$. El parámetro d está a nuestra disposición. La ecuación de recurrencia nos dice que el tercer término ha de ser $a_2 = \alpha(a_0 + d) + \beta a_0$ y buscamos un valor de d para el que ese término sea el siguiente en la progresión, esto es, $a_0 + 2d$. Enseguida nos damos cuenta de que no vamos por buen camino.

Sin desanimarnos, lo volvemos a intentar, pero ahora con términos que estén en progresión geométrica. Empezamos, por ejemplo, con $(1, r, \dots)$. Los siguientes términos son

$$(1, r, \alpha\, r + \beta, \alpha(\alpha r + \beta) + \beta\, r, \dots)\,.$$

Ahora ajustamos r para que el tercer término esté en progresión geométrica con los anteriores; esto es, r ha de cumplir que

$$\alpha\, r + \beta = r^2\,.$$

Vamos con el cuarto término. Querríamos que $\alpha(\alpha\, r + \beta) + \beta\, r = r^3$. Pero obsérvese que

$$\alpha(\underbrace{\alpha r + \beta}_{=r^2}) + \beta\, r = \alpha\, r^2 + \beta\, r = r(\underbrace{\alpha\, r + \beta}_{=r^2}) = r^3\,.$$

¡Oooh! (de asombro): sale gratis. El *mismo valor* de r que nos permite ajustar el tercer término consigue hacerlo con el cuarto. El lector podrá comprobar que lo mismo ocurre para los siguientes. Así que existe una solución de la ecuación de la forma $a_n = r^n$ (recuérdese que esto ya ocurría en las ecuaciones de primer grado), una fórmula de lo más sencilla. Además, la ecuación de segundo grado que define el valor de r adecuado puede tener otra solución, que nos permitiría construir otra sucesión, también con términos en progresión geométrica, con la que completar el análisis del problema.

C. Método de resolución del problema completo

Ya estamos en condiciones de resumir y formalizar estas ideas. Buscamos soluciones (a_n) de la ecuación $(*)$ cuyos términos estén en progresión geométrica; es decir, que sean de la forma $a_n = r^n$, para todo $n \geq 0$, donde r es un cierto número no nulo que determinaremos en un momento. El que sea solución exige que

$$r^n = \alpha\, r^{n-1} + \beta\, r^{n-2} \quad \text{para cada } n \geq 2.$$

Pero estas infinitas condiciones se resumen, en realidad, dividiendo por r^{n-2}, en una sola,

$$\boxed{r^2 = \alpha\, r + \beta}$$

(el lector que haya estudiado el ejemplo 6.1.7 encontrará familiar este argumento). A la ecuación algebraica así obtenida se le llama **ecuación característica**. El análisis dependerá de qué tipo de soluciones tenga esta ecuación de segundo grado.

Caso 1. La ecuación característica tiene dos raíces reales distintas

Llamemos r_1 y r_2 a estas dos raíces. Sabemos que las sucesiones definidas por $a_n = r_1^n$ y $b_n = r_2^n$ son soluciones de $(*)$. Son además, distintas (linealmente independientes), porque $r_1 \neq r_2$. Así que cualquier otra solución se escribirá como combinación lineal de ellas. Es decir, podemos escribir la solución general de $(*)$ como

$$\boxed{\left(A\, r_1^n + B\, r_2^n\right)}$$

donde A y B son dos constantes cualesquiera. Ahora buscamos la (única) solución que verifica las dos condiciones iniciales, para lo que bastará determinar los valores de A y B adecuados mediante sencillas relaciones algebraicas. Lo vemos en un ejemplo.

Ejemplo 6.2.1 *Consideremos la sucesión de números de Fibonacci* (F_n) *dada por* $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ *y* $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ *para cada* $n \geq 2$.

La ecuación característica correspondiente es $r^2 - r - 1 = 0$, cuyas soluciones son, como ya sabemos, $r_1 = (1+\sqrt{5})/2$ y $r_2 = (1-\sqrt{5})/2$; así que la solución general de la ecuación de Fibonacci es

$$A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

En esta fórmula tenemos codificadas todas las soluciones de la ecuación de Fibonacci. Queda determinar los valores de A y B que corresponden a la sucesión que nos incumbe, la que tiene como valores iniciales 0 y 1. Sólo hay que escribir los casos $n = 0$ y $n = 1$ de la fórmula y resolver el sistema de ecuaciones correspondiente:

$$\left.\begin{aligned} 0 = F_0 &= A + B \\ 1 = F_1 &= A\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{aligned}\right\} \implies A = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{y} \quad B = -\frac{1}{\sqrt{5}}\,.$$

De manera que el n-ésimo número de Fibonacci se puede escribir como

$$\boxed{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

la llamada **fórmula de Binet**, de 1843 (aunque Daniel Bernoulli y Euler ya la conocían hacia 1724). Pasan cinco siglos desde que Fibonacci se interesara por estos números hasta que se obtiene esta expresión. Nada menos que cinco siglos separan las simples manipulaciones con la ecuación del nivel de abstracción que supone el análisis que aquí hemos hecho y que nos ha conducido a esta fórmula.

Fórmula, por cierto, algo sorprendente; obsérvese que los distintos términos, que involucran raíces de 5, se combinan mágicamente para dar siempre un entero. Quizás no sea la manera más eficaz de calcular el valor de un cierto F_n, pero descubre, o más bien hace explícita, la relación entre estos números de Fibonacci y $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, la razón áurea. Compruebe el lector que la fórmula se puede reescribir como

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\tau^n - \left(-\frac{1}{\tau}\right)^n\right).$$

Además, como $\tau > 1$, el segundo sumando se hace muy pequeño cuando n es grande, de manera que $F_n \to \tau^n/\sqrt{5}$ cuando $n \to \infty$. Lo que demuestra el resultado que vimos en el ejemplo 6.1.7 sobre el comportamiento asintótico de las razones entre números de Fibonacci consecutivos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \tau\,.$$

Más aún, como $\sqrt{5} > 2$,

$$\left|\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{\tau}\right)^n\right| < \frac{1}{2} \qquad \text{para cada } n \geq 0.$$

Así que F_n es el entero más próximo a $\tau^n/\sqrt{5}$. Si n es par, F_n estará ligeramente por encima de $\tau^n/\sqrt{5}$; y si n es impar, ligeramente por debajo. ♣

Caso 2. La ecuación característica tiene una raíz real doble

La ecuación característica $r^2 - \alpha r - \beta = 0$ tiene una única raíz (doble) r_1 sólo si los coeficientes α y β son muy especiales. En concreto, con la ayuda de la fórmula cuadrática (el radicando $\alpha^2 + 4\beta$ ha de ser 0), obtenemos que tienen que ser de la forma $\alpha = 2r_1$ y $\beta = -r_1^2$.

La ecuación de recurrencia con la que estamos es, pues,

$$a_n = 2r_1\, a_{n-1} - r_1^2\, a_{n-2}\,, \qquad \text{para cada } n \geq 2.$$

Sabemos que $(a_n) = (1, r_1, r_1^2, r_1^3, \dots)$ es una solución de la ecuación, pero falta otra. No queremos que sea un múltiplo de ésta, y parece razonable suponer que ha de depender de r_1. Podríamos intentarlo con la sucesión (b_n), que empieza con $(0, r_1, \dots)$ y que cumple las condiciones requeridas. Miremos el aspecto de sus primeros términos:

$$\begin{aligned} b_2 &= 2r_1 b_1 - r_1^2 b_0 = 2r_1^2\,, \\ b_3 &= 2r_1 b_2 - r_1^2 b_1 = 4r_1^3 - r_1^3 = 3r_1^3\,, \\ b_4 &= 2r_1 b_3 - r_1^2 b_2 = 6r_1^4 - 2r_1^4 = 4r_1^4\,. \end{aligned}$$

De lo más atractivo (y sorprendente): las sucesivas cancelaciones hacen que los términos de la sucesión sean de la forma nr_1^n, para cada $n \geq 0$, de nuevo una fórmula sencilla y manejable. El lector puede comprobar más formalmente que, efectivamente, si r_1 es una raíz doble de la ecuación característica, entonces la sucesión dada por $b_n = n\, r_1^n$ para cada n es una solución de la ecuación de recurrencia. Así que la solución general se puede escribir como

$$\boxed{\left(A\, r_1^n + B\, n\, r_1^n\right)}$$

De nuevo, los valores de A y B se determinarán con las condiciones iniciales.

Por supuesto, había una razón, además de las heurísticas que hemos expuesto aquí, para elegir la forma particular de esta segunda solución (véase el ejercicio 6.2.3). No hay tal *Deus ex machina*, al que a veces somos tan aficionados en los textos de Matemáticas.

Ejemplo 6.2.2 *La ruina del jugador, revisada.*

En el ejemplo 6.1.9 presentábamos los ingredientes del problema: empezamos a jugar con n euros, donde $0 \leq n \leq N$, para cierto N fijo. En cada partida ganamos con probabilidad p y perdemos con probabilidad $q = 1 - p$. Si $a(n)$ es la probabilidad de arruinarnos, entonces

$$a(n+2) = \frac{1}{p}\, a(n+1) - \frac{q}{p}\, a(n)\,, \quad \text{si } 0 \leq n \leq N-2.$$

Las condiciones "iniciales", un tanto inusuales, son $a(0) = 1$ y $a(N) = 0$. La ecuación característica es, en este caso,

$$r^2 - \frac{1}{p} r + \frac{q}{p} = 0,$$

cuyas soluciones son $r_1 = q/p$ y $r_2 = 1$. Llamemos, por comodidad, δ al cociente q/p. Hay dos casos, dependiendo de si $\delta = 1$ ó no.

$\boxed{\text{Caso } p \neq q}$ (es decir, $\delta \neq 1$). Obsérvese que, en cada partida, la probabilidad de ganar no es la misma que la de perder. Si estuviéramos hablando de una moneda, diríamos que está "cargada". Cuando jugamos a la ruleta, apostando al rojo o al negro, estamos en este caso, como luego explicaremos (de hecho, en el caso en que la probabilidad de ganar p es menor que la de perder q, como el lector se habrá imaginado ya).

Como las raíces de la ecuación característica son distintas, la solución general será

$$a(n) = A\,1^n + B\,\delta^n\,.$$

Ahora, con ayuda de las condiciones iniciales, determinamos A y B:

$$\left.\begin{array}{r} a(0) = A + B = 1 \\ a(N) = A + B\,\delta^N = 0 \end{array}\right\} \implies A = -\frac{\delta^N}{1-\delta^N} \quad \text{y} \quad B = \frac{1}{1-\delta^N}\,,$$

con lo que la solución es

$$a(n) = -\frac{\delta^N}{1-\delta^N} + \frac{1}{1-\delta^N}\,\delta^n\,, \quad (\text{donde, recordemos, } \delta = q/p).$$

$\boxed{\text{Caso } p = q = 1/2}$ Ahora hay una única raíz de la ecuación característica, $r_1 = r_2 = 1$, y la solución general se puede escribir como

$$a(n) = A\,1^n + B\,n\,1^n = A + Bn.$$

De las condiciones iniciales obtenemos que $A = 1$ y $B = -1/N$, con lo que

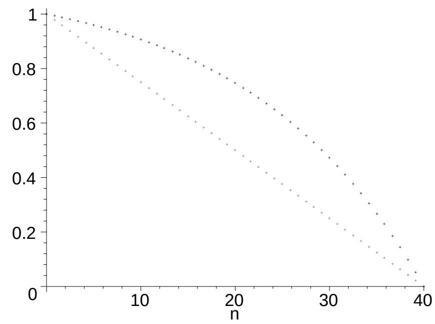
$$a(n) = 1 - \frac{n}{N}.$$

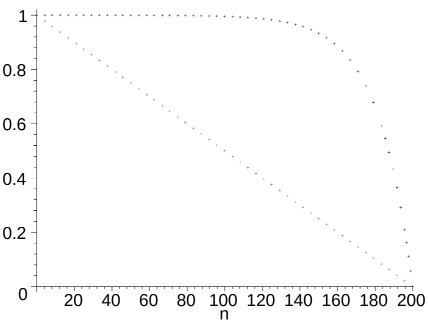
El comportamiento de las dos soluciones es bien diferente: en el caso $p = q$, es una función lineal de n, mientras que en el otro es una función exponencial.

Para entender realmente qué supone esto, supongamos que estamos en un casino europeo apostando al rojo: de los 36 números, hay 18 rojos y otros 18 negros. Pero hay también una casilla, la del 0, que no lleva color; si sale el 0, la banca se lleva todas las apuestas. Parece poco negocio para el casino, pero... La probabilidad de ganar es $p = 18/37$, mientras que la de perder es $q = 19/37$, ligeramente superior, debido a la presencia de esta casilla extra con el 0. El cociente $\delta = q/p$ vale 1,0555. *Prácticamente* 1, pero *no exactamente* 1.

Las gráficas que aparecen a continuación comparan los valores de $a(n)$ en el rango $0 \leq n \leq N$ con $\delta = 1$ y $\delta = 1{,}0555$. Marcamos en el eje horizontal los posibles valores de n, nuestra fortuna inicial, y en el eje vertical los correspondientes de $a(n)$, la probabilidad de arruinarse cuando empezamos a jugar con n euros.

Con $\delta = 1$, claro, tenemos una recta. Pero la gráfica para $\delta = 1{,}0555$ es bien diferente. A la izquierda representamos el caso en que $N = 40$, en el que ya se aprecia una cierta diferencia entre ambas gráficas. La de la derecha corresponde a $N = 200$, y la discrepancia es ya espectacular.





Obsérvese que, en la gráfica de la derecha, la probabilidad de arruinarse es prácticamente 1 (en el caso $\delta = 1,0555$) a menos que n esté muy, pero que muy cercano a $N = 200$. Digamos que estamos jugando a "doblar o arruinarse". Es decir, partimos de una fortuna n que es la mitad de N ($N = 2n$). Si el juego es equilibrado ($\delta = 1$), la probabilidad de arruinarse es siempre un $1/2$, sea cual sea N. Pero en la ruleta ($\delta = 1{,}0555$), para $N = 40$ tenemos una probabilidad de ruina de casi el 70 %... y si estamos con $N = 200$, nos arruinaremos en más del 98 % de las ocasiones. Las conclusiones quedan para el lector. ♣

Caso 3. La ecuación característica tiene dos raíces complejas

La ecuación característica tiene coeficientes reales, así que sabemos[16] que las dos raíces complejas son conjugadas una de la otra. Digamos que son $z_1 = a + bi$ y $z_2 = \overline{z}_1 = a - bi$. El lector puede comprobar que las sucesiones (a_n) y (b_n) definidas, para cada n, mediante $a_n = z_1^n$ y $b_n = z_2^n$ respectivamente, son soluciones de la ecuación de recurrencia, así que su solución general se puede escribir como

$$\big(A\, z_1^n + B\, z_2^n\big) = \big(A\, z_1^n + B\, \overline{z}_1^n\big),$$

donde A y B, como siempre, se determinan con las condiciones iniciales.

Pero todo en este problema, los coeficientes de la ecuación y los propios términos de la sucesión, son números reales. Y obtenemos una solución escrita en términos de números complejos. Pese a la advertencia de Hadamard (véase la página 22), puede que esto no nos deje muy satisfechos... y eso que, aceptando esta escritura con números complejos, ¡la fórmula que se obtiene es de lo más manejable!

Así que intentaremos encontrar otro par de soluciones, que cumplan las condiciones habituales, cuyos términos sean números reales y de manera que la fórmula que obtengamos siga siendo razonable. Nuestras soluciones especiales empiezan con

$$(a_n) = (1, z_1, \dots) \qquad \text{y} \qquad (b_n) = (1, \overline{z}_1, \dots)\,.$$

Usando la forma polar, podemos escribir $z_1 = re^{i\theta}$ y $\bar{z}_1 = re^{-i\theta}$. Pero entonces, recordando la casi mágica fórmula de Euler-De Moivre, $z_1^n = r^n e^{in\theta}$, mientras que $\bar{z}_1^n = r^n e^{-in\theta}$. Así que, para cualquier n, z_1^n y $\bar{z}_1^n$ son uno el conjugado complejo del otro. Por lo tanto, $z_1^n + \bar{z}_1^n$ es un número real, mientras que $z_1^n - \bar{z}_1^n$ es un número imaginario puro.

[16]En el caso de la ecuación de segundo grado es obvio. Para ecuaciones de mayor grado, ya vimos el argumento en la demostración de la proposición 4.48.

Esto nos sugiere definir dos nuevas sucesiones $(\widetilde{a}_n)$ y $(\widetilde{b}_n)$ mediante

$$\widetilde{a}_n = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad \text{y} \qquad \widetilde{b}_n = \frac{a_n - b_n}{2i} \qquad (\text{para cada } n \geq 0)$$

cuyos primeros términos resultan ser

$$\begin{aligned} \widetilde{a}_n &= \Big(\frac{1+1}{2}, \frac{z_1 + \overline{z}_1}{2}, \dots\Big) = (1, \operatorname{Re}(z_1), \dots) \\ \widetilde{b}_n &= \Big(\frac{1-1}{2i}, \frac{z_1 - \overline{z}_1}{2i}, \dots\Big) = (0, \operatorname{Im}(z_1), \dots) \end{aligned}$$

Pero más aún, los términos generales se pueden escribir de manera muy sencilla:

$$\begin{aligned} \widetilde{a}_n &= \frac{z_1^n + \overline{z}_1^n}{2} = r^n \, \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} = r^n \, \cos(n\theta)\,, \\ \widetilde{b}_n &= \frac{z_1^n - \overline{z}_1^n}{2i} = r^n \, \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} = r^n \, \sin(n\theta)\,. \end{aligned}$$

Perfecto: todos los términos son reales, y la fórmula es sencilla. Decidimos entonces emplear, para describir la solución general de la ecuación, la expresión

$$\boxed{\Big(C\, r^n \cos(n\theta) + D\, r^n \operatorname{sen}(n\theta)\Big)_{n=0}^{\infty}}$$

donde, recordemos, $r = |z_1|$ y $\theta = \arg(z_1)$ y z_1 es una de las raíces complejas de la ecuación característica.

EJEMPLO 6.2.3 *Queremos encontrar la sucesión de números (a_n) definidos por*

$$a_n = 2\, a_{n-1} - 2\, a_{n-2}\,, \qquad \textit{para cada } n \geq 2,$$

junto con las condiciones iniciales $a_0 = 1$ y $a_1 = 1$.

De la ecuación característica $r^2 - 2r + 2 = 0$ obtenemos raíces

$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad \text{y} \qquad z_2 = \overline{z}_1 = 1 - i = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}\,.$$

La solución general de la ecuación se puede escribir como

$$\Big(A\,(1+i)^n + B\,(1-i)^n\Big)_{n=0}^{\infty}.$$

Pero también con la siguiente expresión alternativa:

$$\Big(2^{n/2}\Big[C\, \cos\Big(\frac{\pi}{4}\, n\Big) + D\, \operatorname{sen}\Big(\frac{\pi}{4}\, n\Big)\Big]\Big)_{n=0}^{\infty}.$$

Con las condiciones iniciales determinamos que $C = 1$ y que $D = 0$, así que la respuesta buscada es, para cada $n \geq 0$,

$$a_n = 2^{n/2} \cos\Big(\frac{\pi}{4}\, n\Big)\,.$$

Compruébese que, a pesar de escribirse de esta forma algo extravagante, los términos de la sucesión son todos enteros. ♣

Todos los argumentos que hemos desarrollado hasta aquí para el caso de la ecuación de segundo grado se aplican, *mutatis mutandis*, a las ecuaciones lineales, homogéneas y con coeficientes constantes de grado k. Dejamos al lector que reconstruya la teoría para el caso general, y nos limitamos a exponer el resultado básico, así como a ilustrarlo con un ejemplo.

Teorema 6.1 *Dado $k \geq 1$, la solución general de la ecuación*

$$a_n = \alpha_1\, a_{n-1} + \alpha_2\, a_{n-2} + \cdots + \alpha_k\, a_{n-k}$$

se puede escribir de la forma

$$\Big(P_1(n)\, r_1^n + P_2(n)\, r_2^n + \cdots + P_s(n)\, r_s^n\Big)_{n=0}^{\infty},$$

donde $r_1, r_2, \ldots, r_s$ son las raíces distintas (reales o complejas) de la ecuación característica

$$r^k = \alpha_1\, r^{k-1} + \alpha_2\, r^{k-2} + \cdots + \alpha_{k-1}\, r + \alpha_k$$

y cada $P_i(n)$ es un polinomio genérico (con coeficientes arbitrarios) de grado igual a la multiplicidad de la correspondiente raíz r_i menos uno.

Ejemplo 6.2.4 *Consideremos la ecuación $a_n = 4a_{n-1} - 6a_{n-2} + 6a_{n-3} - 5a_{n-4} + 2a_{n-5}$, para cada $n \geq 5$, junto con las condiciones iniciales $a(0) = a(1) = a(2) = a(3) = 0$ y $a(4) = 1$.*

Las raíces de la ecuación característica (una quíntica)

$$r^5 = 4r^4 - 6r^3 + 6r^2 - 5r + 2\,,$$

son los números 2, 1 (raíz doble), i y $-i$ (dos raíces complejas conjugadas, como debe ser). Así que, conforme al teorema anterior, la solución general de la ecuación de recurrencia se puede escribir como

$$\Big((A_1 + A_2\, n)1^n + A_3\, 2^n + A_4\, i^n + A_5\, (-i)^n\Big)_{n=0}^{\infty}.$$

O, si queremos evitar la presencia de números complejos, como

$$\Big((B_1 + B_2\, n)1^n + B_3\, 2^n + B_4\, 1^n\, \cos\Big(\frac{\pi}{2}n\Big) + B_5\, 1^n\, \sin\Big(\frac{\pi}{2}n\Big)\Big)_{n=0}^{\infty}.$$

Si ahora imponemos las cinco condiciones iniciales, obtendremos un sistema de cinco ecuaciones de las que podemos determinar los valores de los números $B_1, \ldots, B_5$. Dejamos al lector la comprobación (algo tediosa) de que la solución del problema es la sucesión dada por

$$a_n = \frac{1}{5}\, 2^n - \frac{1}{2}\, n + \left(-\frac{1}{10} + \frac{1}{20}\, i\right)\, [(-i)^n - i^n] \qquad \text{para cada } n \geq 0,$$

o bien

$$a_n = -\frac{1}{2}\, n + \frac{1}{5}\, 2^n - \frac{1}{5}\, \cos\Big(\frac{\pi}{2}n\Big) + \frac{1}{10}\, \sin\Big(\frac{\pi}{2}n\Big).$$

Ambas fórmulas, pese a su alambicada escritura, representan a la sucesión de números (enteros) cuyos primeros términos son

$$(0, 0, 0, 0, 1, 4, 10, 22, 47, 98, 200, 404, 813, 1632, 3270, \ldots)$$

El lector podrá deducir, a partir de la fórmula anterior, que $a_n \sim 2^n/5$ cuando $n \to \infty$. ♣

6.2.2. Ecuaciones lineales, no homogéneas y con coeficientes constantes

Consideramos ahora un caso más general, en el que la ecuación contiene un término extra que depende del índice n:

$$a_n + B_1 a_{n-1} + B_2 a_{n-2} + \cdots + B_k a_{n-k} = f(n)\,,$$

donde $f(n)$ es una cierta función no nula. De nuevo, y por simplificar la exposición, supongamos que nuestra ecuación es de grado dos,

$$(*) \qquad a_n + \alpha\, a_{n-1} + \beta\, a_{n-2} = f(n) \qquad \text{para cada } n \geq 2.$$

Tendremos, además, dos condiciones iniciales, los valores de a_0 y a_1.

Centrémonos en las soluciones de la ecuación $(*)$, a la que nos referiremos como **ecuación inhomogénea**. Sean (a_n) y (b_n) dos soluciones de $(*)$ y consideremos la sucesión suma (c_n) definida por $c_n = a_n + b_n$ para cada n. Obsérvese que

$$\begin{aligned} c_n + \alpha c_{n-1} + \beta c_{n-2} &= (a_n + b_n) + \alpha(a_{n-1} + b_{n-1}) + \beta(a_{n-2} + b_{n-2}) \\ &= \big(a_n + \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}\big) + \big(b_n + \alpha b_{n-1} + \beta b_{n-2}\big) = f(n) + f(n) = 2f(n)\,. \end{aligned}$$

No obtenemos $f(n)$, así que (c_n) ya no es solución de $(*)$ y, por tanto, no tenemos la estupenda estructura (vectorial) de antes.

Pero no todo está perdido. Al menos sigue ocurriendo que la solución del problema (ecuación inhomogénea más valores iniciales) existe (basta arrancar la sucesión) y es única. De nuevo, los dos valores iniciales determinan completamente la solución que nos interesa. Así que lo que buscamos es una forma adecuada de escribir la solución general de la ecuación $(*)$, para lo que nos apoyaremos en lo que ya sabemos de las ecuaciones homogéneas.

Planteamos la **ecuación homogénea** asociada a nuestro problema:

$$(**) \qquad a_n + \alpha\, a_{n-1} + \beta\, a_{n-2} = 0\,, \qquad \text{para cada } n \geq 2.$$

De esta ecuación sabemos cómo calcular su solución general, que será de la forma $(Ab_n + Bc_n)$, donde (b_n) y (c_n) son sucesiones solución de $(**)$ (con el aspecto que corresponda a cada caso, dependiendo de las raíces de la ecuación característica).

Ahora viene la observación clave: consideremos una solución *particular* de la ecuación $(*)$. Vale una cualquiera, por ejemplo la que obtenemos arrancando la sucesión a partir de dos valores iniciales que fijemos. Llamemos (d_n) a esta solución. Lo que afirmamos es que cualquier sucesión de la forma

$$\Big(Ab_n + Bc_n + d_n\Big)\,,$$

donde A y B son parámetros, es solución de la ecuación inhomogénea $(*)$. Dejamos que el lector haga la comprobación pertinente.

Pero además, *toda* solución de $(*)$ se puede escribir como arriba. Es, una vez más, un argumento de unicidad: si (γ_n) es una solución que empieza por $(\gamma_0, \gamma_1, \dots)$, podemos encontrar A y B que determinen una sucesión que es solución de $(*)$ y que empieza como (γ_n). Así que han de ser la misma. Los detalles quedan como ejercicio 6.2.4 para el lector.

El problema queda resuelto (excepto por un pequeño detalle que explicaremos luego). Si queremos encontrar la expresión de la sucesión de números (a_n) que cumplen la ecuación

$$a_n + \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} = f(n)\,, \qquad \text{para cada } n \geq 2,$$

junto con las condiciones iniciales $a_0 = p$ y $a_1 = q$,

(1) analizamos primero la ecuación homogénea asociada,

$$a_n + \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} = 0,$$

y determinamos la **solución general** de esta ecuación, que será de la forma $(Ab_n + Bc_n)$.

(2) Calculamos una **solución particular** de la ecuación completa; digamos que es la sucesión (d_n).

(3) Ya tenemos la solución general de la ecuación completa, $(Ab_n + Bc_n + d_n)$. Y *ahora* (y no antes) imponemos las condiciones iniciales para determinar los números A y B.

EJEMPLO 6.2.5 *Encontremos la sucesión de números (a_n) que satisface la ecuación de recurrencia $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 7$, junto con las condiciones iniciales $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$.*

La ecuación homogénea asociada es la de Fibonacci, de la que conocemos bien la forma de la solución (véase el ejemplo 6.2.1). Ahora nos damos cuenta (!) de que la sucesión cuyos términos son todos iguales a -7 es solución de la ecuación. Nótese que nos referimos únicamente a la ecuación (los dos primeros valores de esta sucesión son, claro, -7 y -7). Así que la solución general de la ecuación completa se puede escribir como

$$A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 7\,.$$

Imponiendo los valores iniciales $a_0 = 1$ y $a_1 = 1$, y tras unos laboriosos cálculos, determinamos los valores de A y B y concluimos que la solución que buscamos viene dada por

$$a_n = \left(\frac{7}{2} + \frac{9\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{7}{2} - \frac{9\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 7 \qquad \text{para cada } n \geq 0.$$ ♣

Método de los coeficientes indeterminados

El detalle al que nos referíamos es nuestra constante preocupación por que la fórmula obtenida sea manejable. Desde luego, la expresión de la parte “homogénea” de la solución lo es, que para eso hicimos todo el esfuerzo antes. Pero, ¿cómo obtener una solución particular con una expresión sencilla? Si, por ejemplo, la obtenemos partiendo de dos valores iniciales cualesquiera, es casi seguro que no la tendrá. Aunque no existe un método general para obtener estas soluciones “agradables”, disponemos sin embargo de reglas (casi trucos) *ad hoc* que se aplican cuando la función $f(n)$ tiene una forma específica. Queda siempre también, claro, el método de prueba y error.

Lo vemos en un ejemplo, en el que también advertiremos las posibles dificultades del procedimiento, que se denomina **método de los coeficientes indeterminados**. Se trata, esencialmente, de buscar soluciones particulares dentro de la misma “familia” de funciones a la que pertenezca $f(n)$ (obsérvese que, en el ejemplo anterior, la solución particular era una constante, como el término no homogéneo).

Digamos que nos enfrentamos con la ecuación

$$a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 3^n \,.$$

Buscamos una solución particular de la ecuación, e intentamos encontrar una de la forma $\widetilde{a}_n = C3^n$, donde C es una constante que está a nuestra disposición, y que determinamos con la propia ecuación:

$$\widetilde{a}_n - \widetilde{a}_{n-1} - \widetilde{a}_{n-2} = 3^n \quad\Longrightarrow\quad C3^n - C3^{n-1} - C3^{n-2} = 3^n \quad\Longrightarrow\quad 9C - 3C - C = 9\,,$$

de donde obtenemos que $C = 9/5$. Y, efectivamente, $\widetilde{a}_n = \frac{9}{5}3^n$ es una solución particular de la ecuación, como puede comprobar el lector.

Pero ahora imaginemos que la ecuación es

$$a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = \tau^n \,,$$

donde τ es la razón áurea. Probamos, como antes, con una solución del tipo $\widetilde{a}_n = C\tau^n$:

$$\widetilde{a}_n - \widetilde{a}_{n-1} - \widetilde{a}_{n-2} = \tau^n \implies C\tau^n - C\tau^{n-1} - C\tau^{n-2} = \tau^n \implies C(\tau^2 - \tau - 1) = \tau^2\,.$$

Y no hay manera de determinar C, porque $\tau^2 - \tau - 1 = 0$. El método no funciona, *no puede* funcionar, porque τ^n es ya solución de la ecuación homogénea (τ era una de las raíces de la ecuación característica), así que no puede ser solución de la completa.

Inspirándonos en algún argumento que hicimos anteriormente, podríamos intentar con soluciones de la forma $\widetilde{a}_n = C\,n\,\tau^n$:

$$\begin{aligned}\widetilde{a}_n - \widetilde{a}_{n-1} - \widetilde{a}_{n-2} = \tau^n &\implies Cn\tau^n - C(n-1)\tau^{n-1} - C(n-2)\tau^{n-2} = \tau^n \\ &\implies Cn(\tau^2 - \tau - 1) + C(2+\tau) = \tau^2 \implies C = \frac{\tau^2}{2+\tau} = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\,.\end{aligned}$$

Ya tendríamos determinado el valor de C y, por tanto, una solución particular.

Las ideas de este método se pueden aplicar también a ecuaciones en las que el término no homogéneo sea un polinomio o una función seno o coseno. Como las funciones generatrices nos permitirán resolver todos estos casos (véase la sección 10.4), no entraremos en más detalles.

6.2.3. Sistemas de ecuaciones de recurrencia

Consideremos un sistema de dos ecuaciones de recurrencia lineales[17] (de grado uno), homogéneas y con coeficientes constantes:

$$(*) \qquad \left\{\begin{array}{rcl} a_n &=& \alpha_{1,1}\, a_{n-1} + \alpha_{1,2}\, b_{n-1}\,, \\ b_n &=& \alpha_{2,1}\, a_{n-1} + \alpha_{2,2}\, b_{n-1}\,, \end{array}\right. \qquad \text{para cada } n \geq 1,$$

donde los α_{ij} son ciertos números reales; además tendremos unas condiciones iniciales $a_0 = p$ y $b_0 = q$. Resulta conveniente escribir este sistema en forma matricial:

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \qquad \text{para } n \geq 1,$$

[17] En la sección 10.4 aprenderemos a resolver sistemas de ecuaciones de recurrencia con otras herramientas (funciones generatrices) que, en principio, permiten abordar sistemas de ecuaciones de órdenes mayores que 1.

Llamaremos **matriz de transición**[18] a la matriz A. Buscamos dos sucesiones (a_n) y (b_n) que satisfagan las ecuaciones y las dos condiciones iniciales $a_0 = p$ y $a_1 = q$.

La resolución es sencilla y directa: aplicamos reiteradamente la relación $(*)$ hasta llegar al caso $n = 0$, que conocemos (de manera análoga a lo que hacíamos cuando se trataba de una única ecuación de primer orden). En el lenguaje matricial, la iteración de la regla de recurrencia se traduce, simplemente, en la multiplicación de matrices:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ b_{n-2} \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}.$$

Como conocemos los valores de a_0 y b_0, todo el problema se reduce al de calcular la potencia n-esima de la matriz de transición A. ¿Es esto sencillo? La respuesta es casi obvia: depende (de cómo sea la matriz A, claro). Veamos un par de ejemplos primero.

Ejemplo 6.2.6 *Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_n & = & 2\, a_{n-1}\,, \\ b_n & = & 3\, b_{n-1}\,, \end{array} \right.$$

para cada $n \geq 1$, junto con las condiciones iniciales $a_0 = 7$ y $b_0 = 5$.

El sistema es muy especial: las dos ecuaciones están "desacopladas" (para resolver una ecuación no necesitamos la información de la otra). Así que podríamos optar por resolver cada ecuación por su lado. Pero también podemos seguir el procedimiento general:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}.$$

Así que hay que calcular la potencia n-ésima de una matriz diagonal. El lector comprobará sin dificultad que

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

Así que

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n\, a_0 \\ 3^n\, b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \times 2^n \\ 5 \times 3^n \end{pmatrix}.$$

Leyendo componente a componente, obtenemos las soluciones de cada ecuación. ♣

Ejemplo 6.2.7 *Consideremos ahora las condiciones iniciales $a_0 = 1$, $b_0 = 3$ y el sistema*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_n & = & 2\, a_{n-1} \\ b_n & = & a_{n-1} + 2\, b_{n-1} \end{array} \right. \qquad \text{para cada } n \geq 1.$$

La solución del problema viene dada (escrita en forma matricial) por

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

[18]El nombre viene sugerido por la siguiente interpretación: tenemos un cierto sistema descrito por los valores de las sucesiones a_n y b_n en cada "tiempo" n. La matriz A nos dice cómo evoluciona el sistema de un instante de tiempo al siguiente, cuál es la regla de transición entre ambos "estados".

Aunque la matriz no es diagonal, su forma es muy especial. No es muy difícil convencerse (calculando los primeros casos y luego utilizando inducción) de que

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n\,2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix},$$

de manera que la solución del problema es

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n\,2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n \\ n\,2^{n-1} + 3 \times 2^n \end{pmatrix}$$

Compruébese que, efectivamente, las sucesiones $a_n = 2^n$ y $b_n = n\,2^{n-1} + 3 \times 2^n$ verifican el sistema de ecuaciones y las condiciones iniciales. ♣

Hemos visto que hay dos casos especialmente sencillos: cuando la matriz es diagonal,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \text{porque entonces} \quad A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix},$$

o cuando la matriz es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \text{en cuyo caso} \qquad A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ n\,\lambda^{n-1} & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

En general, la matriz de transición A no será tan sencilla. Pero hemos destacado estos dos casos porque nos van a permitir resolver el caso general. Si para ciertos números λ y μ y para cierta matriz P (2×2 e invertible) pudiéramos escribir la matriz A de la siguiente manera:

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1},$$

entonces el cálculo de A^n sería inmediato. Véase, por ejemplo, el caso de la potencia 2:

$$A^2 = \left[P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1} \right]^2 = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix} P^{-1},$$

donde hemos utilizado que $P\,P^{-1} = I$, la matriz identidad 2×2. Un argumento similar (o una prueba por inducción) nos permite deducir que

$$A^n = P \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} P^{-1},$$

con lo que el problema se resolvería efectuando este producto de tres matrices (recordemos que al final habrá que multiplicar también por el vector de condiciones iniciales).

Lo mismo ocurriría si A se pudiera escribir como

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}, \quad \text{en cuyo caso tendríamos que} \quad A^n = P \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ n\,\lambda^{n-1} & \lambda^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Al lector que haya pasado por un curso de Álgebra lineal básica todo esto le resultará familiar. Gran parte del esfuerzo que se emplea en uno de esos cursos va dirigido al problema de la diagonalización o, en su caso, de la obtención de formas canónicas. Una de sus mejores aplicaciones la encontramos, precisamente, en el cálculo de potencias de una matriz.

El resultado básico sobre estas cuestiones asegura que, dada una matriz A de dimensiones 2×2, podremos escribirla de una de las dos siguientes formas[19]:

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1}, \qquad \text{o bien} \qquad A = Q \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} Q^{-1},$$

donde los números λ y μ son los llamados **autovalores** de la matriz (en el segundo caso, λ sería un autovalor doble), y la matriz P (ó Q) es invertible. Estas matrices se calculan a partir de los **autovectores** asociados a los autovalores. Todo esto forma parte del folklore habitual de los cursos de Álgebra lineal, así que no entraremos en los detalles y nos limitaremos a ver un par ejemplos, en los que supondremos cierto manejo con estos conceptos.

Ejemplo 6.2.8 *Una **reacción en cadena**: en un cierto medio hay átomos de un determinado elemento, contra los que lanzamos dos tipos de partículas, A y B. Cuando una partícula A choca con un átomo, éste se desintegra, dando lugar a 2 del tipo A y a 3 del tipo B. Si es una partícula B la que choca, entonces se producen 1 de A y 4 de B. Interesa el número de partículas de cada clase tras n unidades de tiempo, si partimos de 2 de tipo A y 1 de tipo B.*

Llamemos a_n y b_n al número de partículas de tipo A y B, respectivamente, tras n unidades de tiempo. Los procesos de desintegración se traducen en el sistema de recurrencias

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_n & = & 2\,a_{n-1} + b_{n-1}\,, \\ b_n & = & 3\,a_{n-1} + 4\,b_{n-1}\,, \end{array} \right. \qquad \text{para cada } n \geq 1,$$

mientras que la condición inicial es $a_0 = 2$ y $b_0 = 1$. En términos matriciales

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}, \text{ cuya solución es } \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

para cada $n \geq 1$. Así que, si llamamos M a la matriz de transición del sistema, sólo resta calcular su potencia n, para lo que será necesario diagonalizarla. Empecemos calculando sus autovalores, las soluciones de la ecuación

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} = 0\,, \qquad \text{es decir,} \quad (2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = 0,$$

que resultan ser $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 5$. El subespacio asociado al autovalor λ_1 es el núcleo de la aplicación representada por la matriz $M - \lambda_1 I$. Así que debemos considerar el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que nos dice que podemos tomar como autovector asociado al autovalor $\lambda_1 = 1$ a $\mathbf{v_1} = (1, -1)$.

[19]Llamadas *formas canónicas de Jordan*. En realidad, estamos obviando algunas sutilezas, porque lo expuesto es cierto si permitimos que los autovalores sean números complejos. Si no son reales, hay otras formas canónicas que nos permiten escribir la matriz en términos reales.

El subespacio asociado al autovalor $\lambda_2 = 5$ viene dado por el núcleo de $M - \lambda_2 I$, y si procedemos de manera análoga, obtenemos un posible autovector, $\mathbf{v_2} = (1, 3)$ para este autovalor. Ya tenemos la matriz P de cambio de base,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ cuya inversa es } P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y por tanto } M = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}P^{-1}.$$

Calcular entonces M^n ya no representa dificultad alguna:

$$M^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3+5^n & -1+5^n \\ -3+3\times 5^n & 1+3\times 5^n \end{pmatrix}.$$

Finalmente, la solución del problema es

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3+5^n & -1+5^n \\ -3+3\times 5^n & 1+3\times 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5+3\times 5^n \\ -5+9\times 5^n \end{pmatrix}.$$

tiempo	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
Tipo A	2	5	20	95	470	2345	$\cdots$
Tipo B	1	10	55	280	1405	7030	$\cdots$

Así que, en tiempo n, hay $a_n = \frac{1}{4}(5 + 3\times 5^n)$ partículas de tipo A, mientras que de tipo B habrá $b_n = \frac{1}{4}(-5 + 9\times 5^n)$. A la izquierda listamos los primeros casos. Ambas poblaciones crecen muy rápidamente, como corresponde al carácter exponencial de las soluciones. Y, como la propia dinámica del sistema sugería, va a haber más partículas del tipo B que del tipo A.

Pero podría interesarnos saber cuál es la razón entre las dos poblaciones, si se aproxima a un límite finito o no. Obsérvese que, para n muy grande, $a_n \sim \frac{3}{4}5^n$ y $b_n \sim \frac{9}{4}5^n$, por lo que la razón entre las poblaciones se aproxima (y bastante rápidamente) a una proporción 1:3. ¡Esto ya no era tan obvio con sólo mirar las recurrencias! ♣

En el caso de dimensión 2, la forma de Jordan no diagonal aparece cuando la matriz A tiene un autovalor doble λ, y el núcleo de $A - \lambda I$ sólo tiene dimensión 1 (sólo hay un autovector asociado). Si consideramos matrices de dimensión d, la descripción se complica un poco: la forma de la matriz canónica de Jordan dependerá de la multiplicidad de los autovalores y del número de autovectores que tenga asociado cada uno de ellos. Pero, esencialmente, es una matriz "diagonal por cajas", donde cada una de las cajas es de la forma que aparece a la derecha. Veamos un ejemplo:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Ejemplo 6.2.9 *Consideremos el siguiente problema:*

$$a_0 = 1, b_0 = 3, c_0 = 2 \quad y \quad \left\{ \begin{array}{lcl} a_n & = & 2\,a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} \\ b_n & = & 3\,b_{n-1} \\ c_n & = & b_{n-1} + 3\,c_{n-1} \end{array} \right. \qquad \textit{para cada } n \geq 1.$$

La solución del sistema viene dada por la ecuación matricial que escribimos a la derecha. Los autovalores de A (las soluciones de $\det(A - \lambda I) = 0$) son los números 2 y 3 (éste, un autovalor doble). Para el autovalor simple, $\lambda = 2$, el cálculo del núcleo de $A - 2I$ nos dice que podemos tomar como autovector

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

asociado a $\mathbf{v}_1 = (1,0,0)$. Pero el subespacio asociado al autovalor 3 sólo tiene dimensión 1. Concretamente, el núcleo de $A - 3\,I$ está generado por el vector $(1,0,1)$. La matriz canónica no va a ser diagonal, así que tendremos que recurrir a un sustituto. Calculamos el núcleo de la matriz $(A-3\,I)^2$, que resulta estar generado por los vectores $(1,0,1)$ y $(0,1,0)$. Tomamos ahora un vector que esté en el núcleo de $(A-3\,I)^2$ pero no en el de $A-3\,I$; $\mathbf{v}_2 = (1,1,1)$ podría valer. Ahora calculamos

$$\mathbf{v}_3^t = (A-3\,I)\,\mathbf{v}_2^t\,,$$

para obtener $\mathbf{v}_3 = (1,0,1)$. Estos tres vectores forman (al ponerlos como columnas) la matriz P que mostramos a continuación, junto con su inversa P^{-1}:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{de manera que} \quad A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}\,.$$

El cálculo de A^n es ahora ya muy sencillo:

$$A^n = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & n\,3^{n-1} & 3^n \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 2^n & n\,3^{n-1} & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & n\,3^{n-1} & 3^n \end{pmatrix}$$

Finalmente, la solución del sistema se obtiene multiplicando M^n por el vector de condiciones iniciales, y el resultado es $a_n = -2^n + (n+2)\,3^n$, $b_n = 3^{n+1}$ y $c_n = (n+2)\,3^n$. ♣

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 6.2

6.2.1 *Consideramos la ecuación de recurrencia $x_n = \alpha\, x_{n-1} + \beta$, para cada $n \ge 1$, junto con el valor inicial x_0. Compruébese que*

(a) si $\beta = 0$, entonces $x_n = \alpha^n\, x_0$ para cada $n \ge 0$;

(b) si $\alpha = 1$, entonces $x_n = n\,\beta + x_0$ para cada $n \ge 0$;

(c) si $\alpha \neq 1$, entonces

$$x_n = \alpha^n\, x_0 + \beta \left(\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}\right), \qquad \textit{para cada } n \ge 0.$$

6.2.2 *Consideremos dos sucesiones (a_n) y (b_n) linealmente independientes y que sean solución de la ecuación $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}$ para cada $n \ge 2$. Sea (c_n) otra solución de la ecuación. Compruébese que la sucesión (c_n) puede escribirse como combinación lineal de las sucesiones (a_n) y (b_n).*

6.2.3 *Estamos con la ecuación $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta\, a_{n-2}$, para cada $n \ge 2$, junto con las condiciones iniciales a_0 y a_1. Suponemos que r y s son las dos raíces (reales y distintas) de la ecuación característica asociada. Compruébese que la solución de la ecuación de recurrencias (y las condiciones iniciales) se puede escribir como*

$$(a_1 - a_0 s)\frac{r^n - s^n}{r - s} + a_0 s^n\,.$$

Ahora suponemos que r y s se hacen cada vez más próximas (en el límite, estaremos en el caso de una raíz doble de la ecuación característica). Compruébese, quizás apelando a la noción de derivada, que la solución en el caso de raíz doble se puede escribir como combinación lineal de s^n y ns^n.

6.2.4 *Consideremos la ecuación inhomogénea*

$$(*) \quad a_n - \alpha a_{n-1} - \beta a_{n-2} = f(n) \qquad \text{y la homogénea asociada} \quad (**) \quad a_n - \alpha a_{n-1} - \beta a_{n-2} = 0\,.$$

(a) La suma de dos soluciones de $(*)$ *no es solución de* $(*)$*, mientras que la suma de dos soluciones de* $(**)$ *sí que es solución de* $(**)$*. Compruébese que la resta de dos soluciones de* $(*)$ *es solución de* $(**)$*.*

(b) Compruébese que toda solución de $(*)$ *se puede escribir como la suma de la solución general de* $(**)$ *con una solución particular de* $(*)$*.*

6.2.5 *(a) Hállese una fórmula para los números* u_n *que verifican:* $u_0 = a$*,* $u_1 = b$ *y* $u_{n+2} = u_n + n$ *para cada* $n \geq 1$*.*

(b) Un triple lineal es una lista de 3 números naturales a, b, c*, ordenados,* $a < b < c$*, y tales que* $c - b = b - a$*. Sea* T_n *el número de triples lineales formados con números comprendidos entre* 1 *y* n*. Pruébese que*

$$T_{2n+1} = T_{2n} + n$$

y obténgase una recurrencia análoga para T_{2n}*. Hállese una fórmula para* T_n*.*

6.2.6 *Resuélvanse las recurrencias:*

(a) $a_{n+3} = 4a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n,\ n \geq 0$ *con condiciones iniciales* $a_0 = a_1 = 0$ *y* $a_2 = 1$*.*

(b) $a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n,\ n \geq 0$ *con condiciones iniciales* $a_0 = a_1 = 0$ *y* $a_2 = 1$*.*

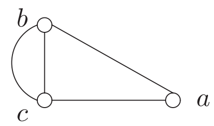
(c) $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 2a_n + n,\ n \geq 0$ *con condiciones iniciales* $a_0 = 0$ *y* $a_1 = 2$*.*

6.2.7 *En un juego en el que* $p = 0{,}49$*, hacemos apuestas de 1 ficha y nos retiramos cuando tengamos 100 fichas. ¿Qué cantidad inicial de fichas deberemos tener para poder asegurar que tenemos, al menos, un* 50 % *de oportunidades de terminar ganando?*

6.2.8 *Hállense las sucesiones* (a_n) *y* (b_n) *dadas por* $a_0 = 1$*,* $b_0 = 0$ *y*

$$\begin{cases} 2a_n = 5a_{n-1} + b_{n-1} \\ 2b_n = a_{n-1} + 5b_{n-1} \end{cases}$$

6.2.9 *Consideremos la figura que dibujamos a la derecha. Colocamos una ficha (aleatoriamente) en una de las posiciones* a*,* b *ó* c *y luego la movemos siguiendo los caminos posibles del dibujo (todos los movimientos son igualmente probables). Llamamos* a_n *a la probabilidad de que la ficha esté en* a *tras* n *movimientos (de forma análoga se definen* b_n *y* c_n*).*



(a) Muéstrese que: $a_n + b_n + c_n = 1, \quad n = 0, 1, 2\ldots$

(b) Calcúlense a_n*,* b_n *y* c_n*. Estímense estas probabilidades en el límite* $n \to \infty$*.*

(c) ¿Cómo cambiaría el problema si la distribución inicial no fuera aleatoria? Por ejemplo, si sabemos que la ficha está inicialmente en a*.*

6.2.10 *La sucesión* (a_n) *está definida por una ecuación de recurrencia lineal y homogénea de grado* m*. Sea* r *el máximo módulo de las raíces de la ecuación característica correspondiente. Pruébese que*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{r^n} < +\infty\,.$$