Cálculo de Primitivas

1. Algunas primitivas inmediatas (o casi inmediatas).

1.- $\displaystyle\int (5x-6)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{5}\int (5x-6)^{\frac{1}{2}}\cdot 5\,dx = \frac{1}{5}\,\frac{2}{3}\,(5x-6)^{\frac{3}{2}} + C.$

Nota: Si $f(x) = 5x-6$ su derivada es 5. En la primera igualdad multiplicamos y dividimos por 5. Así tenemos una integral del tipo

$$\int f(x)^{\frac{1}{2}}\cdot f'(x)\,dx,$$

que es inmediata: $\displaystyle\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}\,x^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} + C.$

2.- $\displaystyle\int \frac{8x^2}{(x^3+1)^2}\,dx = \frac{8}{3}\int (x^3+1)^{-2}\cdot 3x^2\,dx = -\frac{8}{3}\,(x^3+1)^{-1} + C = -\frac{8}{3}\,\frac{1}{(x^3+1)} + C.$

Nota: Si $f(x) = x^3+1$ su derivada es $3\,x^2$. La integral queda del tipo

$$\int f(x)^{-2}\cdot f'(x)\,dx.$$

3.- $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^5 x}\,dx = (-1)\int (\cos x)^{-5}\,(-\operatorname{sen} x)\,dx = \frac{1}{4}\,(\cos x)^{-4} + C = \frac{1}{4\,\cos^4 x} + C.$

Nota: Es de la forma $\displaystyle\int f(x)^{-5}\cdot f'(x)\,dx = -\frac{1}{4}\,f(x)^{-4} + C.$

4.- $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,\cos x\,dx = \frac{1}{2}\,\operatorname{sen}^2 x + C.$

5.- $\displaystyle\int x^{-\frac{3}{4}}\,(x^{\frac{1}{4}}+1)^{-2}\,dx = 4\int \frac{1}{4}\,x^{-\frac{3}{4}}\,(x^{\frac{1}{4}}+1)^{-2}\,dx = \frac{-4}{x^{\frac{1}{4}}+1} + C.$

6.- $\displaystyle\int x\,\operatorname{sen}^3(x^2)\,\cos(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int (\operatorname{sen} x^2)^3\cdot\cos(x^2)\cdot 2\,x\,dx = \frac{1}{8}\,(\operatorname{sen} x^2)^4 + C.$

7.- $\displaystyle\int \sec x\,\tan x\,dx = -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx = (\cos x)^{-1} + C = \sec x + C.$

8.- $\displaystyle\int \frac{g(x)\cdot g'(x)}{\sqrt{1+g(x)^2}}\,dx = \int (1+g(x)^2)^{-\frac{1}{2}}\,(2\,g(x)\cdot g'(x))\,dx = (1+g(x)^2)^{\frac{1}{2}} + C.$

9.- $\displaystyle\int \frac{\log(x+a)}{x+a}\,dx = \int \log(x+a)\,\frac{1}{x+a}\,dx = \frac{1}{2}\,(\log(x+a))^2 + C.$

10.- $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+x\,\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{3}\int \left(1+x^{\frac{3}{2}}\right)^{-1}\frac{3}{2}\,x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}\,\log\left(1+x^{\frac{3}{2}}\right) + C.$

11.- $\displaystyle\int e^{\tan(3\,x)}\,\sec^2(3\,x)\,dx = \frac{1}{3}\,e^{\tan(3\,x)} + C.$

12.- $\displaystyle\int \frac{\left(a+b\,\sqrt{y+1}\,\right)^2}{\sqrt{y+1}}\,dy = \frac{2}{b}\int \left(a+b\,\sqrt{y+1}\,\right)^2\frac{b}{2\,\sqrt{y+1}}\,dy = \frac{2}{b}\,\frac{1}{3}\left(a+b\,\sqrt{y+1}\,\right)^3 + C.$

2. Cambio de variable

$$\int f(\phi(x))\cdot\phi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt, \qquad \text{usando el cambio de variable} \qquad \left\{\begin{array}{l} t = \phi(x) \\ dt = \phi'(x)\,dx \end{array}\right.$$

Observación: en las integrales definidas, la fórmula del cambio de variables es

$$\int_a^b f(\phi(x))\cdot\phi'(x)\,dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\,dt, \qquad \text{usando el cambio de variable} \qquad \left\{\begin{array}{l} t = \phi(x) \\ dt = \phi'(x)\,dx \end{array}\right.$$

1.- Calcular $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2\,x}}\,dx.$

Usando el cambio de variable

$$t = e^x \Longrightarrow dt = e^x\,dx,$$

obtenemos

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2\,x}}\,dx = \int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t + C = \arctan(e^x) + C.$$

2.- Calcular $\displaystyle\int_0^a y\,\sqrt{a^2-y^2}\,dy.$

Sea $t = a^2 - y^2$. Entonces,

$$t = a^2 - y^2 \Longrightarrow dt = -2\,y\,dy. \qquad \text{Además,} \qquad \left\{\begin{array}{l} y = 0 \ \rightsquigarrow \ t = a^2 \\ y = a \ \rightsquigarrow \ t = 0. \end{array}\right.$$

Así,

$$\int_0^a y\,\sqrt{a^2-y^2}\,dy = \int_{a^2}^0 \sqrt{t}\,\frac{-dt}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{a^2}\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\,\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_{t=0}^{t=a^2} = \frac{a^3}{3}.$$

3.- Calcular $\displaystyle\int x^3\,(x^2-1)^{73}\,dx.$

Usamos el cambio de variables $t = x^2 - 1$. De esta forma, $dt = 2\,x\,dx$ y

$$\begin{aligned}\int x^3\,(x^2-1)^{73}\,dx &= \int x^2\,(x^2-1)^{73}\,x\,dx = \frac{1}{2}\int (t+1)\,t^{73}\,dt = \frac{1}{2}\int (t^{74}+t^{73})\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{t^{75}}{75}+\frac{t^{74}}{74}\right)+C = \frac{1}{2}\left(\frac{(x^2-1)^{75}}{75}+\frac{(x^2-1)^{74}}{74}\right)+C.\end{aligned}$$

3. Integración por partes

Fórmula de integración por partes:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Habitualmente se expresa con la notación siguiente:

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du.$$

1.- Calcular $\int x\,e^x\,dx$.

Tomando

$$\left\{\begin{array}{rcl} u = x & \rightsquigarrow & du = dx \\ dv = e^x\,dx & \rightsquigarrow & v = e^x \end{array}\right\} \quad \text{se sigue que} \quad \int x\,e^x\,dx = x\,e^x - \int e^x\,dx = x\,e^x - e^x + C.$$

2.- Calcular $\int x \log x\,dx$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} u = \log x & \rightsquigarrow & du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = x\,dx & \rightsquigarrow & v = \dfrac{x^2}{2}. \end{array}\right.$$

Así

$$\int \log x\,dx = (\log x)\,\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\,\frac{1}{x}\,dx = \cdots$$

3.- Calcular $\int \log x\,dx$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} u = \log x & \rightsquigarrow & du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = dx & \rightsquigarrow & v = x. \end{array}\right.$$

De esta forma,

$$\int \log x\,dx = x\,\log x - \int x\,\frac{1}{x}\,dx = x\,\log x - x + C.$$

4.- Calcular $\int x^5\,\operatorname{sen}(x^2)\,dx$.

Hacemos primero el cambio de variable $t = x^2$, y esta integral se convierte en

$$\int x^5 \operatorname{sen} x^2 \, dx = \frac{1}{2} \int t^2 \operatorname{sen} t \, dt.$$

Para calcular ahora la integral se usa integración por partes:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u = t^2 & \rightsquigarrow & du = 2\,t\,dt \\ dv = \operatorname{sen} t \, dt & \rightsquigarrow & v = -\cos t. \end{array} \right.$$

Entonces,

$$\frac{1}{2} \int t^2 \operatorname{sen} t \, dt = \frac{1}{2} \left(-t^2 \cos t\right) - \int (-\cos t)\, t \, dt$$

De nuevo hay que integrar por partes: $u = t$, $dv = \cos t \, dt$ y se tiene $du = dt$, $v = \operatorname{sen} t$. De esta forma,

$$\int x^5 \operatorname{sen} x^2 = \frac{1}{2} \left(-t^2 \cos t\right) + \left(t \operatorname{sen} t - \int \operatorname{sen} t \, dt\right) = \cdots$$

5.- Calcular $\displaystyle\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$.

Usamos $u = \operatorname{sen} x$, $dv = e^x \, dx$:

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x \, dx.$$

Volvemos a integrar por partes, pero ahora con $u = \cos x$, $dv = e^x \, dx$:

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx.$$

La integral que queremos calcular aparece de nuevo en el lado derecho, con signo menos. Si la pasamos al lado izquierdo se obtiene

$$2 \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \left(\operatorname{sen} x - \cos x\right),$$

y por tanto

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{1}{2} e^x \left(\operatorname{sen} x - \cos x\right) + C.$$

4. Funciones racionales. Descomposición en fracciones simples

Dada una función racional (cociente de polinomios)

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

usaremos el siguiente método para descomponerla en fracciones simples:

(I) **Dividir si** grado$(P) \geq$ grado(Q), para obtener

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = (\text{un polinomio}) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}, \qquad \text{con} \quad \text{grado}(P_1) < \text{grado}(Q).$$

(II) **Factorizar el denominador** en factores de la forma

$$(px+q)^n, \qquad \text{y} \qquad (ax^2+bx+c)^m,$$

donde ax^2+bx+c no tiene raíces reales (es decir, $b^2-4ac<0$).

(III) **Factores lineales**. Por cada factor de la forma $(px+q)^n$, la descomposición en factores simples debe incluir la suma de n fracciones:

$$\frac{A_1}{(px+q)} + \frac{A_2}{(px+q)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(px+q)^n}.$$

(IV) **Factores cuadráticos**. por cada factor de la forma $(ax^2+bx+c)^m$, la descomposición en factores simples debe incluir la suma de m fracciones:

$$\frac{B_1x+C_1}{(ax^2+bx+c)} + \frac{B_2x+C_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \ldots + \frac{B_mx+C_m}{(ax^2+bx+c)^m}.$$

Ejemplo: si $N(x)$ es un polinomio de grado menor que 5, sabiendo que podemos factorizar $x^5+x^4-x-1 = (x-1)(x+1)^2(x^2+1)$, la función racional

$$\frac{N(x)}{x^5+x^4-x-1}$$

tendrá una descomposición en fracciones simples de la forma:

$$\frac{N(x)}{x^5+x^4-x-1} = \frac{N(x)}{(x-1)(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Los coeficientes A, B, C, D y E quedarán determinados al conocer $N(x)$.

1.- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-5\,x+6}\,dx$

Como $x^2-5\,x+6 = (x-3)\,(x-2)$, escribimos

$$\frac{1}{x^2-5\,x+6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}$$

Para determinar A y B de forma que la igualdad sea válida para todo x, multiplicamos esta ecuación por el mínimo denominador común, $(x-3)\,(x-2)$, obteniendo la ecuación

$$1 = A\,(x-2) + B\,(x-3), \quad \text{para todo } x.$$

En particular, tomando $x=2$ obtenemos $B=-1$, y tomando $x=3$ obtenemos $A=1$. Así,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-5\,x+6}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x-3} + \frac{-1}{x-2}\right) dx = \int \frac{1}{x-3}\,dx + \int \frac{-1}{x-2}\,dx \\ &= \log|x-3| - \log|x-2| + C = \log\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C\end{aligned}$$

2.- $\displaystyle\int \frac{5\,x^2+20\,x+6}{x^3+2\,x^2+x}\,dx$

Como $x^3+2\,x^2+x = x(x^2+2\,x+1) = x\,(x+1)^2$, se tiene

$$\frac{5\,x^2+20\,x+6}{x^3+2\,x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

para todo x. Multiplicando por $x\,(x+1)^2$:

$$5\,x^2+20\,x+6 = A\,(x+1)^2 + B\,x\,(x+1) + C\,x, \quad \text{para todo } x.$$

Los valores $x=0$, $x=-1$ y, por ejemplo, $x=1$, nos dan $A=6$, $C=-(5-20+6)=9$. Conociendo A y C, con $x=1$, $2\,B=(5+20+6)-4\,A-C=-2$, de donde $B=-1$. De esta forma,

$$\begin{aligned}\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}\,dx &= \int \frac{6}{x}\,dx + \int \frac{-1}{x+1}\,dx + \int \frac{9}{(x+1)^2}\,dx \\ &= \log\left|\frac{x^6}{x+1}\right| - \frac{9}{x+1} + C.\end{aligned}$$

3.- $\displaystyle\int \frac{2\,x^3-4\,x-8}{(x^2-x)\,(x^2+4)}\,dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C\,x+D}{x^2+4}\right)\,dx$

Multiplicando por $x\,(x-1)\,(x^2+4)$ e igualando numeradores, tenemos

$$2\,x^3-4\,x-8 = A\,(x-1)\,(x^2+4) + B\,x\,(x^2+4) + (C\,x+D)\,x\,(x-1).$$

Con $x=0$ se obtiene $-4\,A=-8$, y $A=2$. Con $x=1$, se sigue que $-10=5\,B$, y así $B=-2$. Para calcular C y D podríamos dar otros dos valores a x y resolver el sistema lineal resultante en C y D. Para ilustrar otro método desarrollamos el miembro derecho de la igualdad anterior (con $A=2$ y $B=-2$) llegando a la igualdad de polinomios

$$2\,x^3-4\,x-8 = C\,x^3 - (C-D+2)\,x^2 - D\,x - 8$$

de donde $C=2$ y $D=4$. Finalmente,

$$\begin{aligned}\int \frac{2\,x^3-4\,x-8}{(x^2-x)\,(x^2+4)}\,dx &= \int \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x-1} + \frac{2\,x+4}{x^2+4}\right)\,dx \\ &= \int \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x-1} + \frac{2\,x}{x^2+4} + \frac{4}{x^2+4}\right)\,dx \\ &= 2\,\log|x| - 2\,\log|x-1| + \log(x^2+4) + 2\,\arctan\frac{x}{2} + C.\end{aligned}$$

4.- $\displaystyle\int \frac{8\,x^3+13\,x}{(x^2+2)^2}\,dx.$

Incluimos una fracción simple por cada potencia de (x^2+2):

$$\frac{8\,x^3+13\,x}{(x^2+2)^2} = \frac{A\,x+B}{x^2+2} + \frac{C\,x+D}{(x^2+2)^2}.$$

Multiplicando por el mínimo común denominador, $(x^2+2)^2$, llegamos a la igualdad

$$8\,x^3 + 13\,x = (A\,x + B)\,(x^2+2) + C\,x + D.$$

Desarrollando y agrupando términos obtenemos

$$8\,x^3 + 13\,x = A\,x^3 + B\,x^2 + (2\,A + C)\,x + (2\,B + D),$$

y así $A = 8$, $B = 0$, $C = -3$ y $D = 0$. Por tanto,

$$\int \frac{8\,x^3 + 13\,x}{(x^2+2)^2}\,dx = \int \left(\frac{8\,x}{x^2+2} + \frac{-3\,x}{(x^2+2)^2} \right) dx = 4\,\log(x^2+2) + \frac{3}{2\,(x^2+2)} + C.$$

5.- Una variación de este tipo de integrales es $\displaystyle\int \frac{A}{a\,x^2 + b\,x + c}\,dx$ cuyas primitivas son una función arcotangente. Para resolverlas se **completan cuadrados** en el denominador para escribirlo en la forma $(mx+n)^2+p$, se reescribe como $p((\frac{mx+n}{\sqrt{p}})^2+1)$, y finalmente se ajustan las constantes. Veamos un ejemplo para ilustrar el método:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx &= \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}\,dx = \frac{4}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{3/4}}\right)^2 + 1}\,dx \\
&= \frac{4}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{2\,x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{4}{3} \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2\,x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\,dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\,\arctan\left(\frac{2\,x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.
\end{aligned}$$

5. Funciones trigonométricas

Vamos a calcular integrales de la forma

$$\int \operatorname{sen}^m x\, \cos^n x\,dx \quad \text{y} \quad \int \sec^m x\, \tan^n x\,dx$$

con m o n un entero positivo. Las pautas para las primeras son las siguientes:

(I) Si la potencia del seno es positiva e impar:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^{2k+1} x\, \cos^n x\,dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^k\, \cos^n x\, \operatorname{sen} x\,dx \\
&= \int (1-\cos^2 x)^k\, \cos^n x\, \operatorname{sen} x\,dx.
\end{aligned}$$

El cambio de variable $t = \cos x$, $dt = -\operatorname{sen} x\,dx$ convierte al integrando en un polinomio o una función racional:

$$\int \operatorname{sen}^{2k+1} x\, \cos^n x\,dx = \int (1-\cos^2 x)^k\, \cos^n x\, \operatorname{sen} x\,dx = \int (1-t^2)^k\, t^n\,(-1)\,dt$$

(II) Si la potencia del coseno es positiva e impar:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^m x \, \cos^{2k+1} x \, dx &= \int \operatorname{sen}^m x \, (\cos^2 x)^k \, \cos x \, dx \\ &= \int \operatorname{sen}^m x \, (1-\operatorname{sen}^2 x)^k \, \cos x \, dx.\end{aligned}$$

Usando el cambio de variable $t = \operatorname{sen} x$, $dt = \cos x \, dx$

$$\int \operatorname{sen}^m x \, \cos^{2k+1} x \, dx = \int \operatorname{sen}^m x \, (1-\operatorname{sen}^2 x)^k \, \cos x \, dx = \int t^m \, (1-t^2)^k \, dt,$$

y queda la integral de un polinomio o de una función racional.

(III) Si las potencias de ambos son pares y no negativas, usamos la fórmula del coseno de una suma, $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$ de donde se deducen las identidades:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

1.-

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^3 x \, \cos^4 x \, dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x) \, \cos^4 x \, \operatorname{sen} x \, dx = \int (1-\cos^2 x) \, \cos^4 x \, \operatorname{sen} x \, dx \\ &= \int (\cos^4 x - \cos^6 x) \, \operatorname{sen} x \, dx.\end{aligned}$$

El cambio de variable $t = \cos x$, $dt = -\operatorname{sen} x \, dx$ nos lleva a

$$\int \operatorname{sen}^3 x \, \cos^4 x \, dx = \int (t^4 - t^6) \, (-1) \, dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

2.-

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} \, dx &= \int \frac{(\cos^2 x) \, \cos x}{\operatorname{sen}^{\frac{1}{2}} x} \, dx = \int (\operatorname{sen} x)^{-\frac{1}{2}} \, (1-\operatorname{sen}^2 x) \, \cos x \, dx \\ &= \int (\operatorname{sen}^{-\frac{1}{2}} x - \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} x) \, \cos x \, dx.\end{aligned}$$

El cambio de variable $t = \operatorname{sen} x$, $dt = \cos x \, dx$ nos lleva a

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} \, dx = \int t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{3}{2}} \, dt = 2 \, t^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{5} \, t^{\frac{5}{2}} + C = 2 \, \operatorname{sen}^{\frac{1}{2}} x - \frac{2}{5} \, \operatorname{sen}^{\frac{5}{2}} x + C.$$

3.- $\displaystyle\int \cos^4 x \, dx = \int \left(\frac{1+\cos(2\,x)}{2} \right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{4} + \frac{\cos(2\,x)}{2} + \frac{\cos^2(2\,x)}{4} \right) dx$

Utilizamos de nuevo la expresión $\cos^2 \alpha = \dfrac{1+\cos(2\,\alpha)}{2}$, esta vez para $\cos^2(2x)$:

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x \, dx &= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{\cos(2\,x)}{2} + \frac{\cos^2(2\,x)}{4} \right) dx \\ &= \int \left[\frac{1}{4} + \frac{\cos(2\,x)}{2} + \frac{1}{4} \left(\frac{1+\cos(4\,x)}{2} \right) \right] dx \\ &= \frac{3}{8} \int dx + \frac{1}{4} \int 2 \, \cos(2\,x) \, dx + \frac{1}{32} \int 4 \, \cos(4\,x) \, dx \\ &= \frac{3\,x}{8} + \frac{\operatorname{sen}(2\,x)}{4} + \frac{\operatorname{sen}(4\,x)}{32} + C.\end{aligned}$$

6. Un último recurso

El cambio de variables $t = \tan(x/2)$ permite reducir las integrales trigonométricas a integrales racionales. Pero los cálculos suelen ser largos y tediosos, por lo que en general es preferible buscar un método alternativo y usar este cambio sólo cuando no se encuentren otras opciones. Para hacer este cambio, hay que tener en cuenta:

$$t = \tan(x/2) \Rightarrow dt = \frac{1/2}{\cos^2(x/2)}\, dx = \frac{1+\tan^2(x/2)}{2}\, dx$$

o bien

$$t = \tan(x/2) \Rightarrow x = 2\arctan t \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt.$$

Además:

$$\mathrm{sen} x = \mathrm{sen}(2\frac{x}{2}) = 2\,\mathrm{sen}\frac{x}{2}\ \cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\ \cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \ \mathrm{sen}^2\frac{x}{2} = \cdots = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

7. Cambios de variable trigonométricos

En muchas ocasiones hay que resolver integrales en las que aparecen términos de la forma $\sqrt{ax^2+bx+c}$, donde la ecuación de segundo grado no tiene raíces reales. Tras completar cuadrados y hacer un primer cambio de variables (ver ejemplo 5 en la sección 4), encontraremos una de las siguientes expresiones:

$$\sqrt{1-t^2}\,, \quad \sqrt{1+t^2}\,, \quad \sqrt{t^2-1}.$$

En el primer caso, el cambio $t =$ sen s, lo transforma en:

$$\sqrt{1-t^2} = \cos s\,, \quad dt = \cos s\, ds.$$

En el segundo caso, el cambio $t = \tan s$, lo transforma en:

$$\sqrt{1+t^2} = \frac{1}{\cos s}\,, \quad dt = \frac{1}{\cos^2 s}\, ds.$$

En el tercer caso, podemos hacer el cambio $t = \dfrac{1}{\mathrm{sen} s}$ de manera que

$$\sqrt{t^2-1} = \frac{1}{\tan s}\,, \quad dt = \frac{-\cos s}{\mathrm{sen}^2 s} ds$$

Una posibilidad más simple es hacer el cambio $t = \cosh u$, de donde se deduce:

$$\sqrt{t^2-1} = \mathrm{senh} u\,, \quad dt = \mathrm{senh} u du.$$

(Recordar que el seno y coseno hiperbólicos se definen por las fórmulas

$$\mathrm{senh} u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}\,,\ \cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$$

y que $(\mathrm{senh} u)' = \cosh u\,,\ (\cosh u)' = \mathrm{senh} u\,,\ (\cosh^2 u) - (\mathrm{senh}^2 u) = 1$.)