

1. Calcula las siguientes primitivas:

$$a) \int (x^2 + 3x) \left(5x^3 - \frac{8}{x^3} \right) dx$$

$$b) \int \left(e^x(e^x - e^{-x}) + \frac{1}{5x-2} \right) dx$$

$$c) \int \left(3 \operatorname{sen}(5x) - \frac{x}{2} - \frac{5}{1+4x^2} \right) dx$$

$$d) \int \left(\frac{x}{1+x^2} + \frac{2}{(4x+1)^2} + \frac{4}{\sqrt{1-2x^2}} \right) dx$$

(Nota: puedes usar que $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan(x/a) + C$; $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin(x/a) + C$).

2. Calcula las siguientes primitivas (integrando por partes):

$$a) \int (x+2)2^x dx$$

$$b) \int (x^2 - 2x)e^{-5x+3} dx$$

$$c) \int x \cos(5x) dx$$

$$d) \int \operatorname{sen} x e^{-x} dx$$

$$e) \int x \sqrt{x+1} dx$$

3. Integrando por partes con $u = \operatorname{sen}^{n-1} x$, obtén la fórmula

$$\int \operatorname{sen}^n x dx = -\frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x dx \quad \text{para } n \geq 2 \text{ entero}$$

y úsala para calcular $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x dx$.

4. Calcula las siguientes primitivas (usando el método de las fracciones simples):

$$\int \frac{x}{(x+1)(x-3)} dx, \quad \int \frac{x^3+1}{x^3+x} dx, \quad \int \frac{2}{(x-1)(x+3)^2} dx, \quad \int \frac{5x^2+5}{(x^2-1)(x^2+2x+2)} dx.$$

SOBRE LA INTEGRAL Y EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

5. Halla $f'(x)$ si

$$a) f(x) = \int_0^x (1+t^2)^{-2} dt, \quad b) f(x) = \int_0^{x^2} (1+t^2)^{-3} dt, \quad c) f(x) = \int_{x^3}^{x^2} (1+t^2)^{-3} dt$$

6. Comprueba que

$$\int_0^x |t| dt = \frac{1}{2} x |x| \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

7. Explica geoméricamente por qué se cumple

$$\int_a^b f(a+b-x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

8. Supongamos que f es una función derivable en todo x y que satisface la ecuación

$$\int_0^x f(t) dt = -\frac{1}{2} + x^2 + x \operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{2} \cos(2x) \quad \text{para todo } x \geq 0.$$

Calcula $f(\pi/4)$ y $f'(\pi/4)$.

9. Calcula $\int_0^1 f(x) dx$, con $f(x)$ igual a:

$$a) \frac{1}{e^x + 4e^{-x}} \quad b) \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} \quad c) \frac{4^x + 1}{2^x + 1} \quad d) \frac{x}{\sqrt{1 + x^4}}$$

(Nota: puedes usar que $\int dx/\sqrt{x^2 + 1} = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + K$).

10. Calcula $\int_0^{\pi/4} f(x) dx$, con $f(x)$ igual a:

$$a) \operatorname{tg}(x) \quad b) \cos^4(x) \quad c) \operatorname{tg}^2(x) \quad d) \sin^5(x) \cos^3(x)$$

11. Calcula las siguientes integrales impropias:

$$a) \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2(x)} dx, \quad b) \int_0^\infty e^{-5x} dx, \quad c) \int_0^1 \ln(x) dx.$$

12. Expresa la integral $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx$ en términos de $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$.

13. Calcula el área de la región limitada por

- a) el eje X y la gráfica de $f(x) = \sin x$ en el intervalo $[0, 8\pi]$;
- b) el intervalo $[0, \pi]$ del eje X y la gráfica de la función $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (la función “parte entera”, o “suelo”).

14. Halla el área de la región limitada por las gráficas de los pares de funciones que se indican:

$$\begin{aligned} a) \quad f(x) &= \frac{2}{4x^2 + 1} & y & \quad g(x) = 2|x|, \\ b) \quad f(x) &= x(e^x + 1) & y & \quad g(x) = x + x^2 e^x, \end{aligned}$$

15. Dada $f(x) = x^2 - 2x + 7$, consideramos el triángulo curvilíneo T limitado entre las tangentes en $x = 0$ y $x = 2$ y la gráfica de f . Halla el área de T .

16. Halla el área de la región limitada por la curva $y^2 = 3x$ y la recta $2y - 2x + 3 = 0$.

17. Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$, calcula el área de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

18. Calcula el área de la región plana limitada por la parábola de ecuación $(y - 2)^2 = x - 1$, la tangente a esta parábola en el punto $(2, 1)$ y el eje X .

19. Deduce, usando integrales, que el volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$ y que el volumen de un cono recto de altura h y radio de la base r es $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

20. Consideremos la región tridimensional infinita $\mathcal{R}$ obtenida al hacer girar la gráfica de $f(x) = x^{-1}$ alrededor del eje X para $x \geq 1$. Comprueba que el volumen de $\mathcal{R}$ es finito y sin embargo su área (lateral) es infinita. Por tanto, se da la paradoja de que pintar $\mathcal{R}$ requiere un área infinita de pintura pero, si es transparente, basta verter un volumen finito de pintura en su interior.

21. Halla el volumen del cuerpo engendrado por la curva

$$y^2 = \frac{1}{9}x(x-3)^2 \quad \text{con} \quad 0 \leq x \leq 3$$

al girarla alrededor del eje X .

22. Halla el área de la región plana definida por las desigualdades:

$$2y - x^2 \geq 0 \quad \text{y} \quad 2x + y^2 \leq 0,$$

y el volumen del cuerpo engendrado por dicha región al girar alrededor del eje X .

EJERCICIOS EXTRA

23. Estudia la convergencia de las siguientes series mediante el criterio de la integral:

$$a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}, \quad b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}, \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1},$$

24. Una partícula se mueve a lo largo del eje X describiendo una trayectoria $x = x(t)$ con velocidad $v(t) = At^2 + 1$. Calcula A sabiendo que $x(1) = x(0)$.

25. La proporción x de moléculas de un gas en la atmósfera disminuye cuando la altura crece con una tasa de variación proporcional a x , es decir,

$$\frac{dx}{dh} = -Cx$$

donde h es la altura en kilómetros sobre el nivel del mar.

a) Dividiendo entre x e integrando, halla una fórmula para $x = x(h)$.

b) Para el oxígeno, $C = 0.07$. ¿A qué altura la proporción de oxígeno es la mitad de la que hay a nivel del mar? Responde a la misma pregunta para el hidrógeno, para el que $C = 0.006$.

c) Teniendo en cuenta que a nivel del mar hay unas 400 000 moléculas de oxígeno por cada una de hidrógeno, ¿a qué altura habrá más hidrógeno que oxígeno?