Probabilidad y Estadística

Grado en Ingeniería Informática

Tema 2
Espacios de probabilidad

Javier Cárcamo

Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid
javier.carcamo@uam.es

Descripción del tema

1. Introducción: Fenómenos y experimentos aleatorios.
2. Álgebra de sucesos.
3. Espacios de probabilidad.
4. Probabilidad condicional.
5. Algunos resultados clásicos.
6. Independencia de sucesos.
7. Ejemplos.
8. Apéndice: Combinatoria elemental.

Objetivos principales

- Comprender la naturaleza de los experimentos aleatorios.
- Entender la probabilidad como medida de incertidumbre.
- Familiarizarse con la notación de la Teoría de la probabilidad.
- Entender que el conocimiento de nueva información sobre el modelo de probabilidad afecta al cálculo de las probabilidades.
- Manejar con soltura los resultados clásicos relativos a la probabilidad condicional.
- Familiarizarse con la noción de independencia estocástica.

1. Introducción: Fenómenos y experimentos aleatorios

Tipos de fenómenos:

1. **Deterministas**: Se conoce desde el principio el resultado final.
2. **Aleatorios**: Muchas situaciones finales posibles.

La **Teoría de la probabilidad** estudia el comportamiento de los fenómenos o experimentos aleatorios.

Dado ϵ experimento aleatorio:

- Conocemos con antelación el conjunto de todos los posibles resultados finales Ω (**espacio muestral**).
- No es posible determinar que resultado se va a dar previa realización de ϵ.
- La Teoría de la Probabilidad nos permitirá "medir" o "cuantificar" la incertidumbre asociada a los posibles resultados finales de un experimento aleatorio.

Ejemplos: Experimentos aleatorios y sus espacios muestrales

1. ϵ: lanzar un dado al aire. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
2. ϵ: lanzar una moneda al aire. $\Omega = \{C, +\}$.
   $(C =$"sacar cara", $+ =$"sacar cruz"$)$
3. ϵ: jugar en bolsa. $\Omega = \{G, P\}$.
   $(G =$"ganar dinero", $P =$"perder dinero"$)$
4. ϵ: lanzar dos dados al aire.

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),\ldots,(6,1),\ldots,(6,6)\} \\ &= \{(a,b) : a, b \in \{1,2,3,4,5,6\}\}.\end{aligned}$$

Situaciones con resultados aleatorios de la vida real

1. Control de calidad en una fábrica (pieza defectuosa o no).
2. Características de muestras recogidas en el campo (especie de insecto, longitud del fémur).
3. Peso y altura de una persona.

Definiciones básicas

Ω es el **espacio muestral**: conjunto de todos los posibles resultados finales de un experimento aleatorio ϵ.

Se llama **suceso (aleatorio)** a un subconjunto del espacio muestral ($A \subseteq \Omega$).
(Concretaremos la definición de suceso con más detalle en breve.)

Si el suceso está formado por un sólo elemento $\omega \in \Omega$, es decir, $A = \{\omega\} \subseteq \Omega$, el suceso se llama **suceso elemental**. Si A no es elemental, A se dice **suceso compuesto**.

El suceso Ω se denomina **suceso seguro**.
(Ω siempre ocurre al realizar ϵ)

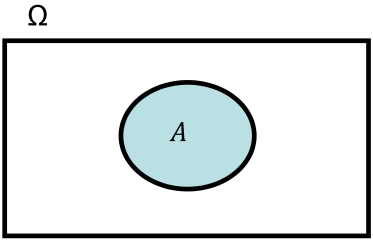
El suceso $\emptyset$ se denomina **suceso imposible**.
($\emptyset$ nunca ocurre al realizar ϵ)

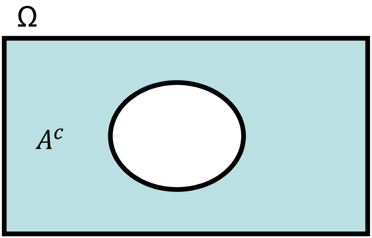
Ejemplo: ϵ : lanzar un dado al aire.

El espacio muestral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- Un suceso A es cualquier subconjunto de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- $P = \{2, 4, 6\}$ es un suceso (sacar un número par).
- $S_4 = \{4\}$ es un suceso elemental (sacar 4).
- $I = \{1, 3, 5\}$ es un suceso (sacar un número impar).
- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ es el suceso seguro (sacar cualquier número).

Si $A \subset \Omega$ es un suceso, A^c (el complementario del conjunto A) se denomina **suceso contrario** a A.

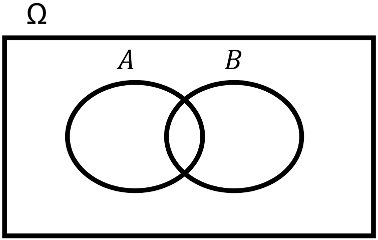


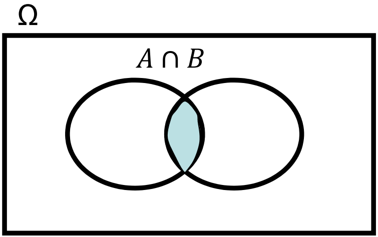


Ejemplo: ϵ : lanzar un dado al aire ($\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$).

- Si $A = \{2, 4, 6\} \Rightarrow A^c = \{1, 3, 5\}$.
- Si $A = \{4\} \Rightarrow A^c = \{1, 2, 3, 5, 6\}$.
- Si $A = \Omega \Rightarrow A^c = \emptyset$.

Sean A y B dos sucesos. La **intersección** de los sucesos A y B, $A \cap B$, representa que se cumplan ambos sucesos simultáneamente.

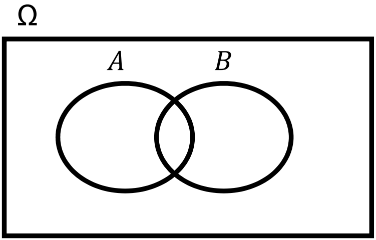


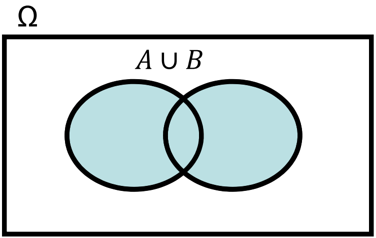


Ejemplo: ϵ : lanzar un dado al aire ($\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$).

- Si $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\} \Rightarrow A \cap B = \emptyset$.
- Si $A = \{2, 4\}$, $B = \{1, 4, 5\} \Rightarrow A \cap B = \{4\}$.

Sean A y B dos sucesos. La **unión** de los sucesos A y B, $A \cup B$, representa que se cumpla el suceso A o que se cumpla el suceso B.

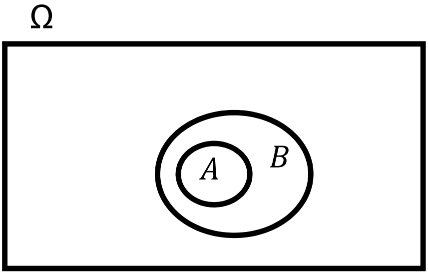




Ejemplo: ϵ : lanzar un dado al aire ($\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$).

- Si $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\} \Rightarrow A \cup B = \Omega$.
- Si $A = \{2, 4\}$, $B = \{1, 4, 5\} \Rightarrow A \cup B = \{1, 2, 4, 5\}$.

Sean A y B dos sucesos. La **inclusión** de A en B, $A \subseteq B$, representa que se si se cumple A, entonces también se cumple B.



Ejemplo: ϵ : lanzar un dado al aire ($\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$).

- Si $A = \{2\}$, $B = \{2, 4, 6\} \Rightarrow A \subseteq B$.
  (Si sacamos un 2, entonces hemos sacado un número par)

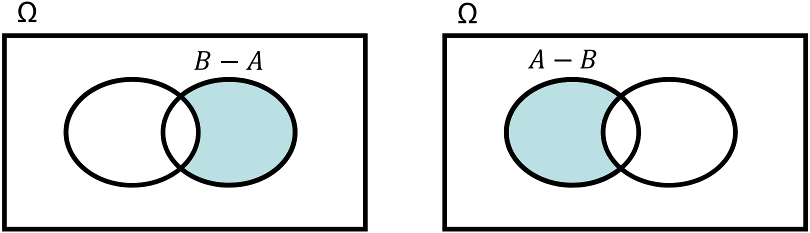
Sean A y B dos sucesos. La **diferencia** de B y A,

$$B - A = B \cap A^c,$$

representa que se cumple B y *no* se cumple A.

Si $A \subseteq B$, $B - A$ se denomina **diferencia propia**.

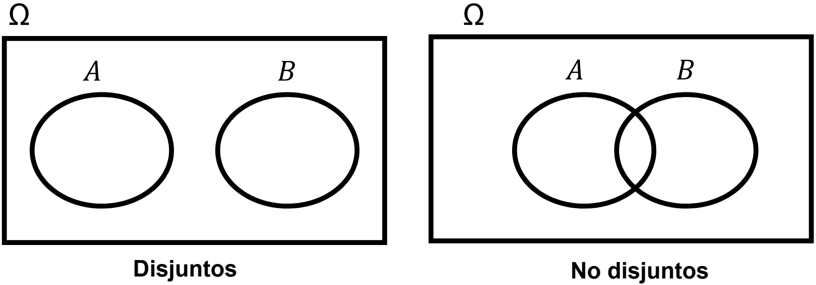
Observar que $A^c = \Omega - A$.



Ejemplo: ϵ : lanzar un dado al aire ($\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$).

- Si $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{2, 4\} \Rightarrow A - B = \{6\}$.
- Si $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \Omega \Rightarrow A - B = \emptyset$.

Sean A y B dos sucesos. A y B se dicen **disjuntos** o **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$. En este caso la unión entre ellos se denota también $A \cup B = A \uplus B = A + B$ (unión disjunta).



Ejemplo: ϵ : lanzar un dado al aire ($\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$).

- $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ son disjuntos. $A + B = \Omega$.
- $A = \{2, 4, 6\}$ y $B = \{2\}$ *no* son disjuntos.

Propiedades de las operaciones con sucesos

Conmutatividad:

- $A \cup B = B \cup A$ (unión).
- $A \cap B = B \cap A$ (intersección).

Asociatividad:

- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (unión).
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (intersección).

Elementos neutros:

- $A \cup \emptyset = A$ (unión).
- $A \cap \Omega = A$ (intersección).

Distributividad:

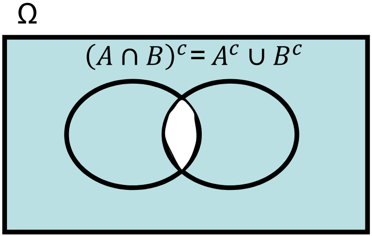
- De la unión respecto a la intersección:
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- De la intersección respecto a la unión:
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

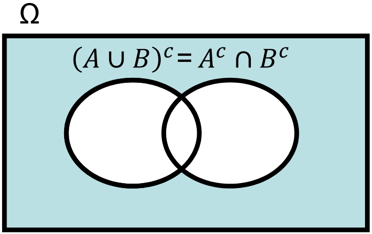
Propiedades de complementación

- $(A^c)^c = A$.
- $\Omega^c = \emptyset$ y $\emptyset^c = \Omega$.

Leyes de De Morgan

- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.





Queremos definir la probabilidad como *medida* de la incertidumbre.

Definiciones de la probabilidad en la historia

Clásica: Basada en los juegos de azar. La probabilidad se define como el cociente entre los casos favorables y los posibles.

Inconvenientes: ¿Qué ocurre cuando Ω es infinito o cuando los sucesos elementales no son equiprobables?

Frecuentista o empírica: La probabilidad de un suceso se define como el límite de las frecuencias relativas del suceso.

Inconvenientes: ¿Qué número de pruebas debemos realizar?, ¿qué ocurre con aquellos experimentos que se puedan repetir una sola vez?

Axiomática: Engloba a las anteriores y solventa los problemas mencionados. Es la que estudiaremos y se debe a Kolmogorov.

Un **espacio de probabilidad** es un triplete $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, donde

(1) Ω es un conjunto no vacío llamado **espacio muestral**.

(2) $\mathcal{F}$ es una σ-**álgebra** o **tribu** de $\mathcal{P}(\Omega)$ (partes de Ω).

(3) P es una **medida de probabilidad** sobre $\mathcal{F}$, es decir,

$$\begin{aligned} \mathrm{P} : \mathcal{F} &\longrightarrow [0,1] \\ A &\longmapsto \mathrm{P}(A) \end{aligned}$$

verificando los **axiomas de probabilidad de Kolmogorov**:

(A1) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$.

(A2) σ-**aditividad** o **aditividad numerable**: $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ disjuntos dos a dos (es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset$, si $i \neq j$), entonces:

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i).$$

Nota: En algunas ocasiones no es posible calcular la probabilidad de cualquier subconjunto de Ω. Las colecciones de conjuntos adecuadas para calcular probabilidades son las σ-álgebras.

Una colección $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ se dice que es una σ-**álgebra** o **tribu** si

(1) $\Omega \in \mathcal{F}$.

(2) $\mathcal{F}$ es cerrada o estable para la complementación.

$$\text{Si } A \in \mathcal{F}, \text{ entonces } A^c \in \mathcal{F}.$$

(3) $\mathcal{F}$ es estable para la unión numerable.

$$\text{Si } \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}, \text{ entonces } \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

Los elementos de $\mathcal{F}$ se llaman **sucesos (aleatorios)**.

Propiedades de las σ-álgebras

(1) $\emptyset \in \mathcal{F}$.

(2) Si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$, entonces $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

(3) Si $\{A_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{F}$, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$ y $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$.

(4) Si $\{A_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{F}$, entonces $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$.

Nota: Para nuestros intereses y por simplicidad, podemos suponer que todos los subconjuntos de Ω están en la σ-álgebra $\mathcal{F}$. Por tanto, supondremos que podemos calcular la probabilidad de cualquier conjunto.

Propiedades de la probabilidad

1. $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$.
2. $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{F}$ disjuntos, entonces $\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathrm{P}(A_i)$.
3. Si A, $B \in \mathcal{F}$, entonces $\mathrm{P}(B - A) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$.
4. A, $B \in \mathcal{F}$ y $A \subset B$. $\mathrm{P}(B - A) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)$ y $\mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$.
5. $\mathrm{P}(A^c) = 1 - \mathrm{P}(A)$.
6. **Principio de inclusión-exclusión:**

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A \cup B) &= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) \\
\mathrm{P}(A \cup B \cup C) &= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) \\
&\quad - (\mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A \cap C) + \mathrm{P}(B \cap C)) \\
&\quad + \mathrm{P}(A \cap B \cap C).
\end{aligned}$$

$$\mathrm{P}\left(\cup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathrm{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathrm{P}(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{n+1} \mathrm{P}\left(\cap_{i=1}^n A_i\right).$$

7. $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{F}$, entonces $\mathrm{P}(\cup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n \mathrm{P}(A_i)$.

Ejemplo: En una escuela el 50 % del alumnado ha aprobado inglés, el 20 % francés y el 5 % los dos idiomas. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar un alumno al azar que haya aprobado alguna de las dos asignaturas?

Ejemplo: Sean A y B dos sucesos de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ tales que $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = 1/2$ y $\mathrm{P}(A \cup B) = 2/3$. Calcular:

(a) $\mathrm{P}(A \cap B)$.

(b) $\mathrm{P}(A^c \cap B^c)$.

(c) $\mathrm{P}(A \cap B^c)$.

(d) $\mathrm{P}(A^c \cap B)$.

Ejemplo: Sean A y B dos sucesos de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ tales que $\mathrm{P}(A) = 0{,}3$, $\mathrm{P}(B) = 0{,}4$ y $\mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}1$. Señalar qué afirmaciones son falsas.

(a) $\mathrm{P}(A \cup B) = 0{,}6$.

(b) $\mathrm{P}(A \cap B^c) = 0{,}2$.

(c) $\mathrm{P}(A \cap (B \cup B^c)) = 0{,}4$.

(d) $\mathrm{P}(A^c \cap B) = 0{,}3$.

(e) $\mathrm{P}((A \cap B)^c) = 0{,}9$.

Modelo clásico o de Laplace: Dado $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ espacio muestral finito, la aplicación:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{n}, \quad A \subseteq \Omega,$$

es una medida de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

En este ejemplo, cada elemento ω_i $(i = 1, \dots, n)$ tiene la misma probabilidad $(\mathrm{P}(\{\omega_i\}) = 1/n,\ i = 1, \dots, n)$. Esto se conoce como **equiprobabilidad**.

Ejemplo: ϵ : lanzar un dado al aire $(\Omega = \{1, \dots, 6\})$.
$\mathrm{P}(A) = \mathrm{card}(A)/6$ $(A \subseteq \Omega)$ es una probabilidad sobre Ω.

$$\mathrm{P}(\{2,4,6\}) = 3/6 = 1/2, \qquad \mathrm{P}(\{6\}) = 1/6.$$

Ejemplo: ϵ : extraer una carta de una baraja española $(\Omega = \{Xi : X \in \{O, B, C, E\}, i \in \{1,2,3,4,5,6,7,S,C,R\}\})$.
$\mathrm{P}(A) = \mathrm{card}(A)/40$ $(A \subseteq \Omega)$ es una probabilidad sobre Ω.

$$\mathrm{P}(\text{«sacar figura»}) = 12/40 = 3/10, \qquad \mathrm{P}(\{O1\}) = 1/40.$$

Modelo finito: Sea $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ un espacio muestral finito y $\{p_1, \ldots, p_n\}$ números con $p_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ y $p_1 + \cdots + p_n = 1$. La aplicación:

$$\mathrm{P}(\{\omega_i\}) = p_i \quad (i = 1, \ldots, n), \quad \mathrm{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} \mathrm{P}(\{\omega_i\}), \quad A \subseteq \Omega,$$

es una medida de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Nota: El modelo de Laplace es un caso particular del modelo finito en el que todas las masas de probabilidad son iguales.

Ejemplo: ϵ : lanzar un dado al aire cargado o trucado $(\Omega = \{1, \ldots, 6\})$ de forma que la probabilidad de los sucesos elementales es: $\mathrm{P}(\{6\}) = 1/2$ y $\mathrm{P}(\{i\}) = 1/10$, $i = 1, \ldots, 5$.

$$\mathrm{P}(\{2, 4, 6\}) = 2/10 + 1/2 = 7/10, \qquad \mathrm{P}(\{1, 3\}) = 1/5.$$

Ejemplo: ϵ : puntuación al lanzar dos dados $(\Omega = \{2, \ldots, 12\})$.

$$\mathrm{P}(\{2\}) = 1/36, \quad \mathrm{P}(\{7\}) = 1/6, \quad \mathrm{P}(\{2, 7\}) = 1/36 + 1/6 = 7/36.$$

Espacios discretos: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ contable, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ y $\mathrm{P}(\{w_i\}) \in [0,1]$ tal que $\sum_i \mathrm{P}(\{\omega_i\}) = 1$. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ es un espacio de probabilidad.

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} \mathrm{P}(\{\omega_i\}), \quad A \subseteq \Omega.$$

Ejemplo: ϵ : Lanzar una moneda sucesivamente y observar cuantas caras sacamos antes de que salga la primera cruz.

En este ejemplo $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ y $\mathrm{P}(\{n\}) = 1/2^{n+1}$ $(n \geq 0)$.

$$\mathrm{P}(\{2\}) = 1/2^3, \quad \mathrm{P}(\{7\}) = 1/2^8, \quad \mathrm{P}(\{0,1,2,3\}) = 15/16.$$

Problema: El caballero de Meré (inicio de la probabilidad)

Tal caballero jugaba a dos juegos:

Juego A: Lanzar un dado 4 veces. Apuesta: sacar al menos un 6.

Juego B: Lanzar 2 dados 24 veces. Apuesta: sacar al menos un doble 6.

Observó (empíricamente) que con el juego A ganaba más de la mitad de las veces y, sin embargo, con el juego B perdía más de la mitad de las veces.

No entendía la razón de sus observaciones ya que argumentaba:

En A: $4{\cdot}(1/6) = 2/3$ (4 tiradas por prob. de sacar 6)
En B: $24{\cdot}(1/36) = 2/3$ (24 tiradas por prob. de sacar doble 6)

Preguntó a Pascal: ¿cómo es posible la diferencia de ganancias?

Indicación: Obviamente, Pascal sabía que no se pueden sumar probabilidades de sucesos que no sean mutuamente exclusivos.

Ejemplo: ϵ: lanzar un dado equilibrado. El modelo de probabilidad asociado es: $(\Omega = \{1, \ldots, 6\}, \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ (modelo de Laplace).

En este ejemplo, $\mathrm{P}(\{6\}) = 1/6$.

Supongamos ahora que poseemos cierta información adicional, por ejemplo, sabemos que ha salido un número par. Es decir, se ha producido el suceso $P = \{2, 4, 6\}$.

Es claro que ahora la probabilidad de sacar 6 ha cambiado. Ahora será una nueva probabilidad, P^*, y

- $\mathrm{P}^*(\{1\}) = 0$.
- $\mathrm{P}^*(\{6\}) = \dfrac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \dfrac{1}{3} = \dfrac{1/6}{1/2}$.

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espacio de probabilidad y A, $B \in \mathcal{F}$ con $\mathrm{P}(B) > 0$. Se llama **probabilidad de A condicionada a B** a:

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}.$$

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espacio de probabilidad y $B \in \mathcal{F}$ fijo con $\mathrm{P}(B) > 0$. La aplicación:

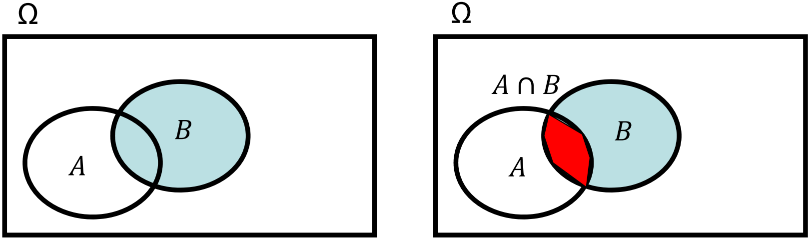
$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\cdot|B) : \mathcal{F} &\longrightarrow [0,1] \\ A &\longmapsto \mathrm{P}(A|B) \end{aligned}$$

es una medida de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{F})$. Por tanto, $\mathrm{P}(\cdot|B)$ verifica los axiomas y propiedades de una probabilidad.

La nueva información disponible (se ha dado B) ha modificado la medida de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{F})$. Hemos pasado de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}(\cdot))$ a $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}(\cdot|B))$. De esta manera incorporamos esta información conocida al modelo de probabilidad.

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espacio de probabilidad y A, $B \in \mathcal{F}$ con $\mathrm{P}(B) > 0$. Se llama **probabilidad de A condicionada a B** a:

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}.$$



Idea intuitiva: La $\mathrm{P}(A|B)$ es la medida de la parte de A que está en B normalizada para que la total tenga medida 1.

Ejemplo: Se lanzan dos dados legales. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ modelo de Laplace.

- ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los dados sea 7?
- ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los dados sea 7 sabiendo que...?
  - La suma de los dados es impar.
  - La suma es mayor que 6.
  - El resultado del primer dado es impar.
  - Los dos dados tuvieron el mismo resultado.
  - Los dos dados tuvieron distinto resultado.

$S(2)$	$S(3)$	$S(4)$	$S(5)$	$S(6)$	$S(7)$	$S(8)$	$S(9)$	$S(10)$	$S(11)$	$S(12)$
$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$	$(2,6)$	$(3,6)$	$(4,6)$	$(5,6)$	$(6,6)$
	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(3,5)$	$(4,5)$	$(5,5)$	$(6,5)$	
		$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	$(4,4)$	$(5,4)$	$(6,4)$		
			$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(5,3)$	$(6,3)$			
				$(5,1)$	$(5,2)$	$(6,2)$				
					$(6,1)$					

Fórmula del producto

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ espacio de probabilidad y $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ tales que $\mathrm{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) > 0$. Se tiene:

- $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2|A_1)$.
- $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2|A_1)\mathrm{P}(A_3|A_1 \cap A_2)$.

En general:

- $\mathrm{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2|A_1) \cdots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$.

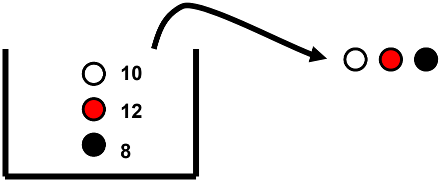
Observación: La probabilidad condicional nos permite (en algunas ocasiones) calcular la probabilidad de una intersección.

Fórmula del producto

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ espacio de probabilidad y $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ tales que $\mathrm{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) > 0$. Se tiene:

$$\mathrm{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2|A_1) \cdots \mathrm{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Ejemplo: Una urna contiene 10 bolas blancas, 12 rojas y 8 negras. ¿Cuál es la probabilidad de que extraigamos primero una bola blanca, luego una roja y luego una negra con y sin reemplazamiento?

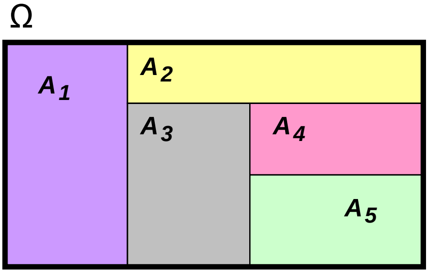


$$¿\mathrm{P}(B_1 \cap R_2 \cap N_3)?$$

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ espacio de probabilidad. Una colección contable (finita o numerable) de sucesos $\{A_1, A_2, \dots\} \subset \mathcal{F}$ se dice que es un **sistema completo de sucesos (S.C.S.)** o una **partición de** Ω si:

(a) $\mathrm{P}(A_i) > 0$, $i \geq 1$.

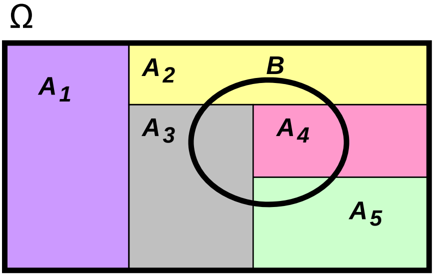
(b) $\Omega = \biguplus_i A_i$ (unión disjunta).



Fórmula de la probabilidad total

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espacio de probabilidad y $\{A_i\}_i \subset \mathcal{F}$ un S.C.S. Entonces, para cualquier $B \in \mathcal{F}$,

$$\mathrm{P}(B) = \sum_i \mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B|A_i).$$



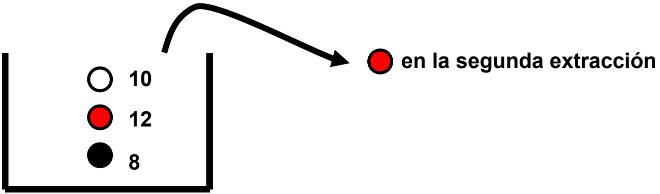
Nota: Mediante la Fórmula de la probabilidad total podemos calcular la probabilidad de cualquier suceso a través de las probabilidades condicionadas en un S.C.S.

Fórmula de la probabilidad total

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espacio de probabilidad y $\{A_i\}_i \subset \mathcal{F}$ un S.C.S. Entonces, para cualquier $B \in \mathcal{F}$,

$$\mathrm{P}(B) = \sum_i \mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B|A_i).$$

Ejemplo: Una urna contiene 10 bolas blancas, 12 rojas y 8 negras. Hemos realizado dos extracciones sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola roja en la segunda extracción?



$$¿\mathrm{P}(R_2)?$$

Fórmula de Bayes (de la probabilidad a posteriori de las causas)

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espacio de probabilidad, $\{A_i\}_i \subset \mathcal{F}$ un S.C.S y $B \in \mathcal{F}$ con $\mathrm{P}(B) > 0$, entonces

$$\mathrm{P}(A_j|B) = \frac{\mathrm{P}(A_j)\mathrm{P}(B|A_j)}{\sum_i \mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B|A_i)}, \qquad j \geq 1.$$

Las probabilidades $\mathrm{P}(A_n)$ se llaman **probabilidades a priori**.

Las probabilidades $\mathrm{P}(A_n|B)$ se llaman **probabilidades a posteriri**.

Nota: Mediante la Fórmula de Bayes podemos calcular las probabilidades de un S.C.S. condicionadas a B a través de las probabilidades condicionadas a ese S.C.S.

Nota: Si $A \in \mathcal{F}$ con $\mathrm{P}(A) > 0$, entonces $\{A, A^c\}$ es una partición de Ω. En este caso particular,

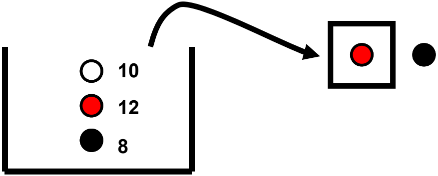
$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)}{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A) + \mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B|A^c)}.$$

Fórmula de Bayes

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espacio de probabilidad, $\{A_i\}_i \subset \mathcal{F}$ un S.C.S y $B \in \mathcal{F}$ con $\mathrm{P}(B) > 0$, entonces

$$\mathrm{P}(A_j|B) = \frac{\mathrm{P}(A_j)\mathrm{P}(B|A_j)}{\sum_i \mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B|A_i)}, \qquad j \geq 1.$$

Ejemplo: Una urna contiene 10 bolas blancas, 12 rojas y 8 negras. Extraemos una bola (no la miramos). Extraemos una segunda bola y es negra. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola que hemos extraído en primer lugar sea roja?



¿$\mathrm{P}(R_1|N_2)$?

Definición: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ espacio de probabilidad. Dos sucesos $A, B \in \mathcal{F}$ se dicen **independientes** si $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$.

Notación: $AB = A \cap B$. (A, B indep. sii $\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$.)

Observaciones:

- Si $\mathrm{P}(A) = 0$, entonces A y B ind. para todo $B \in \mathcal{F}$.
- Si $\mathrm{P}(A) = 1$, entonces A y B ind. para todo $B \in \mathcal{F}$.
- Si A y B ind. con $\mathrm{P}(B) > 0$, entonces $\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A)$.

  Nota: Si A y B son independientes, la ocurrencia de uno no altera la probabilidad de que ocurra el otro (y al revés). Esta es la idea detrás de la definición de independencia.
- Si A y B ind., entonces: A, B^c ind.; A^c, B ind.; y A^c, B^c ind.

Ejemplo: Las extracciones sucesivas de bolas con reemplazamiento son independientes. ($P(B_2|B_1) = P(B_2)$). Sin embargo, las extracciones sucesivas de bolas sin reemplazamiento *no* son independientes ($P(B_2|B_1) \neq P(B_2)$).

Definición: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ espacio de probabilidad. Tres sucesos $A, B, C \in \mathcal{F}$ se dicen **(mutuamente) independientes** si:

- $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$.
- $\mathrm{P}(A \cap C) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$.
- $\mathrm{P}(B \cap C) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$.
- $\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$.

Observación: $A, B, C \in \mathcal{F}$ son independientes sii $(*)$ y $(**)$.

$$(*) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) \\ \mathrm{P}(AC) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C) \\ \mathrm{P}(BC) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C) \end{array} \right\} \quad \{A, B, C\} \ \textbf{ind. dos a dos}$$

$$(**) \qquad \mathrm{P}(ABC) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$$

Observación: $(*) \not\Rightarrow (**)$ y $(**) \not\Rightarrow (*)$.

Observación: $A, B, C \in \mathcal{F}$ son independientes sii $(*)$ y $(**)$.

$(*)$ $\{A, B, C\}$ independientes dos a dos.
$(**)$ $\mathrm{P}(ABC) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$.

Observación: $(*) \not\Rightarrow (**)$ y $(**) \not\Rightarrow (*)$.

Contraejemplo 1: $(*) \not\Rightarrow (**)$

$(\Omega = \{a, b, c, d\}, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ modelo de Laplace.

(Los sucesos elementales $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ y $\{d\}$ son equiprobables.)

$A = \{a, b\}$, $B = \{b, c\}$ y $C = \{c, a\}$ son independientes dos a dos, pero *no* son (mutuamente) independientes.

Contraejemplo 2: $(**) \not\Rightarrow (*)$

$(\Omega = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ modelo de Laplace.

$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $B = \{a_1, a_3, a_5, a_7\}$, $C = \{a_1, a_2, a_4, a_8\}$ verifican $(**)$, pero no son independientes dos a dos.

Definición: Sea $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{F}$. Se dice que los sucesos $\{A_i\}_{i\in I}$ son **(mutuamente) independientes** si

$$\forall \{A_{i_1},\dots,A_{i_n}\} \subset \{A_i\}_{i\in I},\ \mathrm{P}(A_{i_1}\cdots A_{i_n}) = \mathrm{P}(A_{i_1})\cdots \mathrm{P}(A_{i_n}).$$

En particular, n sucesos $\{A_1,\dots,A_n\}$ son independientes sii:

- $\mathrm{P}(A_1\cap A_2) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2)$.
- $\mathrm{P}(A_1\cap A_3) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_3)$.
- $\vdots \quad \vdots$
- $\mathrm{P}(A_1\cap A_2\cap A_3) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(A_3)$.
- $\mathrm{P}(A_1\cap A_2\cap A_4) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(A_4)$.
- $\vdots \quad \vdots \quad \vdots$
- $\mathrm{P}(A_1\cap\cdots\cap A_n) = \mathrm{P}(A_1)\cdots\mathrm{P}(A_n)$.

Pregunta: Comprobar la independencia de algunos sucesos puede ser una tarea complicada. ¿Cuántas condiciones debemos comprobar para asegurar que $\{A_1,\dots,A_n\}$ son independientes?

Proposición: $\{A_i\}_{i\in I}$ independientes $\Longrightarrow \{A_i^c\}_{i\in I}$ independientes.

Ejercicio: Sean $A_1, A_2, \;, A_n$ sucesos independientes con $\mathrm{P}(A_i) = p$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Halla la probabilidad de que:

1. ninguno de los A_i ocurra;
2. un número par de los A_i ocurran.

Ejercicio: Con las hipótesis habituales, halla la probabilidad de que en una reunión de 25 personas haya al menos dos con la misma fecha de cumpleaños.

¿Cuál es el número mínimo de personas para que esa probabilidad sea al menos 0,5?

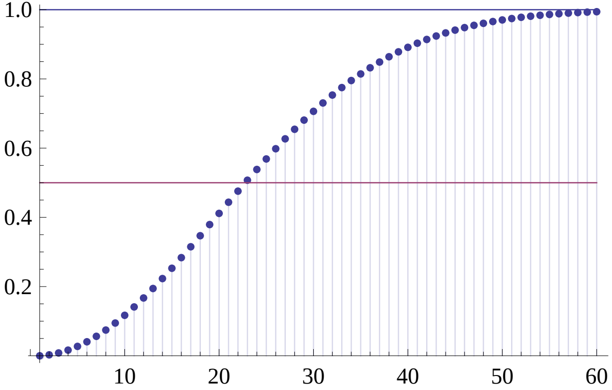
Nota: Para calcular $p = \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \cdots \cdot \frac{341}{365}$ se puede aproximar su logaritmo:

$$\begin{aligned} \log p &= \left(\sum_{i=0}^{24} \log(365 - i) \right) - 25 \log 365 \\ &\approx 25 \frac{\log 365 + \log 341}{2} - 25 \log 365 \\ &= \frac{25}{2} (\log 341 - \log 365) = -0{,}8502. \end{aligned}$$

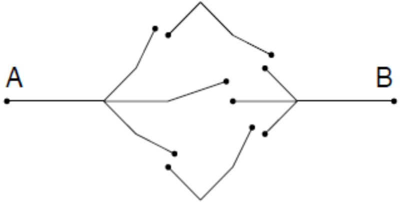
Por tanto, $1 - p \approx 0{,}57$. (El verdadero valor es $1 - p = 0{,}56869970 \cdots$.)

Ejercicio: Con las hipótesis habituales, halla la probabilidad de que en una reunión de 25 personas haya al menos dos con la misma fecha de cumpleaños.

¿Cuál es el número mínimo de personas para que esa probabilidad sea al menos 0,5?



Ejercicio: En el circuito de la figura, cada interruptor está cerrado con probabilidad p, independientemente de todos los demás. Subsana los fallos en la siguiente argumentación para calcular la probabilidad de que pueda circular la corriente entre A y B.



Sea C el suceso que indica que la corriente circula entre A y B.

1. $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, donde C_1 significa que la corriente pasa por arriba, C_2 por el medio y C_3 por abajo.
2. $\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(C_1) + \mathrm{P}(C_2) + \mathrm{P}(C_3)$.
3. Por simetría, $\mathrm{P}(C) = 3\mathrm{P}(C_1)$.
4. Por independencia, $\mathrm{P}(C) = 3(1 - p)^2$.

Ejercicio: El borracho. Un trasnochador dispone de un llavero con tres llaves totalmente indistinguibles en la oscuridad, de las cuales sólo una abre la puerta de su casa. Para dar con la llave en cuestión sigue uno de los siguientes métodos:

M_1: Prueba las llaves una tras otra teniendo cuidado de no volver a usar la misma.

M_2: Prueba una llave y si no abre agita el llavero y prueba otra vez.

Contéstese a las siguientes preguntas:

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que abra al tercer intento si sigue el método primero? ¿y si sigue el segundo método?

(b) Se sabe además que el trasnochador usa el segundo método cuando vuelve a casa después de haber bebido en exceso (lo cual ocurre uno de cada tres días) y el primer método cuando regresa sobrio. Si se conoce que en los dos primeros intentos ha fracasado, ¿cuál es la probabilidad de que el trasnochador esté borracho?

Combinatoria: Teoría matemática que proporciona métodos para determinar el número de elementos de un conjunto finito.

Recordamos que, si $m, n \geq 0$, y $n \leq m$,

- **Factorial de** n: $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$ ($0! = 1$ por definición).
- **Número combinatorio** m **sobre** n:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

Problema: Sean $\{a_1, \ldots, a_m\}$ m elementos.

¿Cuántos grupos de n elementos pueden formarse con $\{a_1, \ldots, a_m\}$?

Problema análogo: Disponemos de una urna con m bolas numeradas. Extraemos sucesivamente n de ellas, es decir, tomamos una muestra de tamaño n.

¿Cuántos muestras posibles de tamaño n podemos extraer?

Problema: Disponemos de una urna con m bolas numeradas. Extraemos sucesivamente n de ellas, es decir, tomamos una muestra de tamaño n.

¿Cuántos muestras posibles de tamaño n podemos extraer?

Hay que precisar dos cuestiones:

- **Tipos de muestreo:**
  (1) **Sin repetición** (sin reemplazamiento): no podemos sacar dos veces la misma bola.
  (2) **Con repetición** (con reemplazamiento): podemos sacar más de una vez la misma bola.

- **Tipos de muestras:**
  (A) **Variaciones**: Importa el orden $((1,2) \neq (2,1))$.
  (B) **Combinaciones**: No importa el orden $((1,2) = (2,1))$.

(1) **Solución:** $\{a_1, \ldots, a_m\}$ m elementos. ¿Cuántos grupos de n elementos pueden formarse sin reemplazamiento?

(1-A) **Variaciones ordinarias:** Un grupo es distinto de otro atendiendo a los elementos y a su orden. *Variaciones de m elementos tomadas de n en n.*

$$V_m^n = \frac{m!}{(m-n)!} = m \cdot (m-1) \cdots (m-n+1).$$

(Este número combinatorio también se conoce como el *factorial descendente*, $m^{\underline{n}} = m \cdot (m-1) \cdots (m-n+1)$.)

Ejemplo: $m = 4$, $n = 2$, $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.

$$\begin{array}{cccc} (a_1, a_2) & (a_2, a_1) & (a_3, a_1) & (a_4, a_1) \\ (a_1, a_3) & (a_2, a_3) & (a_3, a_2) & (a_4, a_2) \\ (a_1, a_4) & (a_2, a_4) & (a_3, a_4) & (a_4, a_3) \end{array}$$

$$V_4^2 = \frac{4!}{2} = 4 \cdot 3 = 12, \qquad ((a_1, a_2) \neq (a_2, a_1)).$$

(1) **Solución:** $\{a_1, \ldots, a_m\}$ m elementos. ¿Cuántos grupos de n elementos pueden formarse sin reemplazamiento?

(1-A) **Permutaciones:** Caso $n = m$ (Variaciones de m elementos tomados de m en m). *Permutaciones de m elementos*.

$$P_m = V_m^m = m! = m \cdot (m-1) \cdots 2 \cdot 1.$$

Ejemplo: $m = 3$, $n = 3$, $\{a_1, a_2, a_3\}$.

$$\begin{array}{ccc} (a_1, a_2, a_3) & (a_2, a_3, a_1) & (a_2, a_1, a_3) \\ (a_1, a_3, a_2) & (a_3, a_1, a_2) & (a_3, a_2, a_1) \end{array}$$

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 = 6, \qquad ((a_1, a_2, a_3) \neq (a_2, a_1, a_3)).$$

(1) **Solución:** $\{a_1, \ldots, a_m\}$ m elementos. ¿Cuántos grupos de n elementos pueden formarse sin reemplazamiento?

(1-B) **Combinaciones ordinarias:** Un grupo es distinto de otro atendiendo a los elementos. *Combinaciones de m elementos tomadas de n en n.*

$$C_m^n = \binom{m}{n}.$$

Ejemplo: $m = 4$, $n = 2$, $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.

$$\begin{array}{lll} (a_1, a_2) & & \\ (a_1, a_3) & (a_2, a_3) & \\ (a_1, a_4) & (a_2, a_4) & (a_3, a_4) \end{array}$$

$$C_4^2 = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6, \qquad ((a_1, a_2) = (a_2, a_1)).$$

(2) **Solución:** $\{a_1, \ldots, a_m\}$ m elementos. ¿Cuántos grupos de n elementos pueden formarse con reemplazamiento?

(2-A) **Variaciones con repetición:** Un grupo es distinto de otro atendiendo a los elementos y a su orden y admitimos repetición. *Variaciones con repetición de m elementos tomadas de n en n.*

$$VR_m^n = m^n.$$

Ejemplo: $m = 3$, $n = 2$, $\{a_1, a_2, a_3\}$.

$$\begin{array}{ccc} (a_1, a_1) & (a_2, a_1) & (a_3, a_1) \\ (a_1, a_2) & (a_2, a_2) & (a_3, a_2) \\ (a_1, a_3) & (a_2, a_3) & (a_3, a_3) \end{array}$$

$$VR_3^2 = 3^2 = 9.$$

(2) **Solución:** $\{a_1, \ldots, a_m\}$ m elementos. ¿Cuántos grupos de n elementos pueden formarse con reemplazamiento?

(2-B) **Combinaciones con repetición:** Un grupo es distinto de otro atendiendo a los elementos y admitimos repetición.
Combinaciones con repetición de m elementos tomadas de n en n.

$$CR_m^n = \binom{m+n-1}{n} = \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}.$$

Ejemplo: $m = 3$, $n = 2$, $\{a_1, a_2, a_3\}$.

$$\begin{array}{lll} (a_1, a_1) & & \\ (a_1, a_2) & (a_2, a_2) & \\ (a_1, a_3) & (a_2, a_3) & (a_3, a_3) \end{array}$$

$$CR_3^2 = \binom{4}{2} = 6.$$

Resumen

	Muestras ordenadas	Muestras sin ordenar
Sin reemplazamiento	V_m^n	C_m^n
Con reemplazamiento	VR_m^n	CR_m^n

Otro problema: Supongamos que tenemos n elementos de los cuales $n_1, n_2, \ldots, n_m$ son iguales ($n_1 + \cdots + n_m = n$). Es decir,

$$\{\overbrace{a_1, \ldots, a_1}^{n_1}, \overbrace{a_2, \ldots, a_2}^{n_2}, \ldots, \overbrace{a_m, \ldots, a_m}^{n_m}\}.$$

¿Cuántos grupos de n elementos pueden formarse atendiendo al orden?

Permutaciones con repetición:

$$P_n^{n_1,\ldots,n_m} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}.$$

Ejemplo: $n_1 = 3$, $n_2 = 2$ ($n = n_1 + n_2 = 5$), $\{a_1, a_1, a_1, a_2, a_2\}$.

$$\begin{array}{lll}
(a_1, a_1, a_1, a_2, a_2) & (a_1, a_2, a_1, a_2, a_1) & (a_2, a_1, a_2, a_1, a_1) \\
(a_1, a_1, a_2, a_1, a_2) & (a_1, a_2, a_2, a_1, a_1) & (a_2, a_2, a_1, a_1, a_1) \\
(a_1, a_1, a_2, a_2, a_1) & (a_2, a_1, a_1, a_1, a_2) & \\
(a_1, a_2, a_1, a_1, a_2) & (a_2, a_1, a_1, a_2, a_1) &
\end{array}$$

$$P_5^{3,2} = \frac{5!}{3!2!} = 10.$$

Ejercicio: De todas las sucesiones de longitud n compuestas por las cifras 0, 1 y 2 se elige una al azar. Hallar la probabilidad de los sucesos siguientes:

(a) La sucesión comienza con 0.

(b) La sucesión contiene exactamente m unos.