Variables aleatorias

Cálculos con variables aleatorias

1. La variable X toma los valores $0, 2, 4, 6, \ldots, 100$ (son 51 valores) con probabilidades

$$\mathbf{P}(X = 2j) = \frac{1}{25 \cdot 51}\, j \qquad \text{para } j = 0, 1, 2, \ldots, 50.$$

Calcula $\mathbf{E}(X)$.

2. Halla, para una variable aleatoria continua X con función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & \text{si} \quad 0 < x < 1; \\ k - x, & \text{si} \quad 1 \le x < 2; \\ 0, & \text{en el resto de los casos}, \end{cases}$$

a) la constante k.
b) la función de distribución de X;
c) la probabilidad de que X esté comprendida entre 1 y 2;
d) la probabilidad de que X sea menor que 1;
e) sabiendo que X es mayor que 0.5, la probabilidad de que sea menor que 1.5.

3. La función de densidad de una variable aleatoria continua X es:

$$f_X(x) = \begin{cases} ax^2 + b, & \text{si} \quad x \in (0, 2); \\ 0, & \text{en caso contrario}. \end{cases}$$

Determina a y b, sabiendo que $\mathbf{P}(1 < X \le 2) = 1/3$. Halla $\mathbf{E}(X)$.

4. a) La variable aleatoria X tiene función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si} \quad x \in (0, 1); \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Calcula su media y su desviación típica. Halla la función de distribución de X.

b) La variable Y se relaciona con la variable X del apartado anterior como sigue: $Y = (1+X)^2$. ¿Para qué valores es la función de densidad de Y no nula? Halla la función de distribución $F_Y(y)$ de Y (usando la expresión de la función de distribución de X del apartado anterior). Deduce una fórmula para $f_Y(y)$ y, finalmente, halla $\mathbf{E}(Y)$ y $\mathbf{V}(Y)$.

Ejercicios de modelación con variables aleatorias

5. Suponiendo que la probabilidad de que un niño que nace sea varón es 0.51, halla la probabilidad de que una familia de 6 hijos tenga:

a) por lo menos una niña;
b) por lo menos un niño;
c) por lo menos dos niños y una niña.

6. El número de erratas por página en un libro sigue una distribución de Poisson. En una muestra de 100 páginas se han observado las siguientes frecuencias:

Número de erratas	0	1	2	3	4	5
Frecuencia	27	37	23	9	2	2

Estimamos el parámetro λ de la Poisson con la *media muestral* del experimento anterior.

a) Halla la probabilidad de que en una página tomada al azar haya alguna errata.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un libro de 20 páginas no tenga erratas?

7. El tiempo medio hasta que se produce un fallo en un sistema de alarma es de 6 meses. Se supone que el tiempo entre dos fallos consecutivos sigue una distribución exponencial.

a) Calcula la probabilidad de que la alarma tarde más de un mes en fallar. (Supóngase que todos los meses tienen igual número de días.)
b) En un mismo edificio se instalan 10 de estas alarmas. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 6 de estas alarmas tarden en fallar más de un mes?

8. Un pájaro de cierta especie come vorazmente mariposas de una población muy grande. Estas mariposas pueden comer, a su vez, de una planta venenosa, de manera que si el pájaro come una mariposa envenenada, deja de comer mariposas ese día. Suponiendo que el 40% de la población de mariposas come de la planta venenosa, halla el número medio de mariposas comidas en un día por el pájaro.

9. La intensidad de un impulso sigue una variable aleatoria X con función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x/9, & \text{si} \quad x \in (0,3); \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

(a) Calcula la intensidad media del impulso.
(b) Si medimos 90 impulsos independientes, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente tres tengan una intensidad inferior a 0.3?

10. En una población, la cantidad de plomo X presente en la sangre de una persona elegida al azar es una variable aleatoria con función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} x/5, & \text{si} \quad 0 \le x \le 2; \\ (10-2x)/15, & \text{si} \quad 2 \le x \le 5; \\ 0, & \text{si} \quad x \le 0 \quad \text{ó} \quad x \ge 5. \end{cases}$$

a) Calcula la cantidad media de plomo en la sangre de los individuos de la población.
b) Elegimos una persona al azar. Halla la probabilidad de que la cantidad de plomo en su sangre sea inferior a 2.
c) Calcula la probabilidad de que en 150 personas elegidas al azar haya entre 58 y 63 personas con una cantidad de plomo inferior a 2.

(Nota: el valor de $\Phi(x)$ se puede calcular usando la instrucción `=distr.norm.estand(x)` en Excel; mientras que $\Phi^{-1}(p)$ se puede calcular con `=distr.norm.estand.inv(p)`).

11. Halla el área que queda bajo la curva de la normal estándar en los siguientes casos: a) a la derecha de 1.25. b) a la izquierda de -0.40. c) entre -1.35 y 1.35. d) fuera del intervalo $[-1.5, 1.5)$.

12. Modelamos el cociente de inteligencia IQ de un individuo con una variable X que se distribuye según una $\mathcal{N}(100, 15)$.

a) Calcula la probabilidad de que un individuo elegido al azar tenga un IQ superior a 120.
b) Suponiendo que un individuo con carrera universitaria debe tener un IQ superior a 110, halla la probabilidad de que un licenciado tenga un IQ superior a 120.

13. a) Sea X una variable normal estándar. Calcula el valor de a para el que $\mathbf{P}(|Z| < a) = 95\%$.

b) Sea ahora Z una variable normal de media $\mu = 1$ y desviación típica $\sigma = 2$. Calcula el valor de a (que es un número positivo) para el que $\mathbf{P}(|Z| < a) = 95\%$. (Sugerencia: en este caso, quizás debas usar un ordenador para calcular numéricamente el valor de a).

14. Un botánico ha observado que la anchura X de las hojas del álamo sigue una distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ con $\mu = 6$ cm, y que el 90% de las hojas tiene una anchura inferior a 7.5 cm. Halla σ y la probabilidad de que una hoja mida más de 8 cm.

15. La anchura en milímetros de una población de coleópteros sigue una distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. El 77% de la población mide menos de 12 mm y que el 84% mide más de 7 mm. Halla μ y σ.

16. La longitud (en mm) de un tornillo salido de fábrica es una variable aleatoria $\mathcal{N}(10, 1)$. El tornillo se considera desechable si su longitud es menor de 8 mm o mayor de 12 mm. Se empaquetan los tornillos en cajas de 101 tornillos. El fabricante se compromete a devolver toda caja con más de un tornillo defectuoso. Calcula la probabilidad de devolver una caja.

17. El peso de una gacela (en kg) es una variable aleatoria X que se distribuye según una $\mathcal{N}(50, 6)$. Se van a capturar 10 gacelas.

a) Describe la distribución de la variable aleatoria Y que cuenta el número de gacelas de las 10 capturadas que pesan menos de 47 kg. Calcula $\mathbf{P}(Y = 2)$.
b) Queremos transportar las gacelas capturadas en un vehículo. ¿Cuál será el peso medio de la carga?