Probabilidad y Estadística
Segundo del grado en Ingeniería de Telecomunicaciones, UAM, 2018-2019

Examen final, 15-1-2019

1. La variable aleatoria X tiene función de densidad $f(x)$. Se sabe que $\mathbf{P}(X > 1) = 30\,\%$. Además, se sabe que

$$\int_{-\infty}^{2} f(x)\,dx = \frac{3}{4}.$$

Suponiendo que $X > 1$, ¿cuál es la probabilidad de que $X > 2$?

2. Tenemos dos urnas. La urna 1 contiene 50 bolas blancas y 50 bolas azules. La urna 2 contiene 70 blancas y 30 azules. Se va a realizar el siguiente experimento aleatorio:

- se sorteará, usando una moneda regular, una de las dos urnas;
- de esa urna elegida se extraerán, en orden, y devolviendo en cada paso la bola a la urna, 10 bolas;
- se anotarán los colores de esas 10 bolas extraídas.

¿Cuál es la probabilidad de que, en este experimento, se obtengan 8 bolas blancas y 2 azules (no necesariamente en ese orden)?

3. Un cierto dado produce sus seis resultados con arreglo a las siguientes probabilidades:

1	2	3	4	5	6
10 %	10 %	20 %	25 %	5 %	30 %

a) En un primer experimento, se lanza el dado 3 veces seguidas. ¿Cual es la probabilidad de que la puntuación total sea 17?

b) El segundo experimento consiste en lanzar el dado hasta que salga un 5. En media, ¿cuántos lanzamientos durará este segundo experimento?

4. La variable X sigue una normal de parámetros $\mu_X = 0$ y $\sigma_X = 1$. La variable Y sigue una normal de parámetros $\mu_Y = 1$ y $\sigma_Y = 2$.

a) Si X e Y fueran independientes, ¿cuánto valdría la varianza de la variable $Z = X - 3Y$?

b) Si X e Y tuvieran correlación $\rho(X, Y) = -1/3$, ¿cuánto valdría la varianza de la variable $W = X + Y$?

5. La función de densidad conjunta del vector aleatorio (X, Y) viene dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-x-y} & \text{si } x, y > 0, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Calcula $\mathbf{P}(Y > 2X)$.

6. En un cierto videojuego van apareciendo enemigos, a los que se dispara hasta acabar con ellos. El siguiente enemigo aparece en cuanto se termina con el anterior.

Se modela el número de disparos necesario para acabar con un enemigo con una variable geométrica de parámetro $1/10$.

Se gana el juego si se logra eliminar a 100 enemigos.

¿Cuál es la probabilidad de ganar el juego si se dispone de a lo sumo 1200 disparos?

7. Un dado produce sus seis resultados con arreglo a las siguientes probabilidades: los resultados pares (el 2, el 4 y el 6) aparecen con una cierta probabilidad p (cada uno de ellos); los resultados impares (el 1, el 3 y el 5) lo hacen con probabilidad q (cada uno de ellos).

Se ha lanzado 30 veces ese dado y se han obtenido los siguientes resultados:

resultado	1	2	3	4	5	6
número de apariciones	3	6	5	10	3	3

Estima, con esta muestra, los valores de los parámetros p y q por máxima verosimilitud.

8. En dos cantones suizos se va a someter a referendum una iniciativa. Sólo caben dos respuestas: "sí" y "no".

El objetivo de una empresa de encuestas es estimar la diferencia entre la proporción de habitantes del cantón 1 que apoyan la iniciativa y la proporción de los habitantes que lo hacen en el cantón 2 con un error menor que $1.96\,\%$ y confianza del $95\,\%$.

Para ello, se encuestará a n personas (elegidas al azar e independientemente) en el cantón 1 y a otras n en el cantón 2. ¿Cuál es el mínimo valor de n para el que se puede alcanzar el objetivo descrito antes?

9. Se toman muestras del peso X en gallinas de dos granjas. En la primera granja se han pesado 140 gallinas, obteniéndose una media muestral de 1.7 kg y una cuasidesviación típica muestral de 0.3 kg. En la otra granja se pesaron 100 animales: se obtuvo una media muestral de 2.0 kg y una cuasidesviación típica muestral de 0.4 kg. Fijamos un nivel de significación $\alpha = 5\,\%$ y suponemos normalidad (en el peso de las gallinas de ambas granjas).

¿Se puede concluir, con ese nivel de significación, y como parecen sugerir los datos, que la variabilidad del peso de las gallinas es menor en la primera granja que en la segunda?

10. Se cree que el resultado X de un cierto experimento aleatorio sigue una normal de parámetros $\mu = 1$ y $\sigma = 1$. Para contrastar si esta hipótesis es aceptable, se ha repetido 100 veces el experimento, y se han clasificado esos resultados en cuatro rangos, tal y como se muestra en la siguiente tabla:

rango	≤ -1	$(-1,0]$	$(0,1]$	> 1
frecuencia	5	15	42	38

Con un nivel de significación del $5\,\%$, ¿se puede aceptar que, en efecto, esa muestra fue producida con una $\mathcal{N}(1,1)$?

• Algunos valores de percentiles de la normal estándar:

α	$5\,\%$	$4.5\,\%$	$4.0\,\%$	$3.5\,\%$	$3.0\,\%$	$2.5\,\%$	$2.0\,\%$	$1.5\,\%$	$1.0\,\%$	$0.5\,\%$
z_α	1.645	1.695	1.751	1.812	1.881	1.960	2.054	2.170	2.326	2.576

• **Algunos valores de la función Φ de distribución de la normal estándar:**

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\Phi(x)$	0.135 %	2.275 %	15.866 %	50.000 %	84.134 %	97.725 %	99.865 %

• **Algunos valores de percentiles de la χ^2:**

α	5 %	4.5 %	4.0 %	3.5 %	3.0 %	2.5 %	2.0 %	1.5 %	1.0 %	0.5 %
$\chi^2_{\{2;\alpha\}}$	5.991	6.202	6.438	6.705	7.013	7.378	7.824	8.399	9.210	10.597
$\chi^2_{\{3;\alpha\}}$	7.815	8.049	8.311	8.607	8.947	9.348	9.837	10.465	11.345	12.838
$\chi^2_{\{4;\alpha\}}$	9.488	9.742	10.026	10.345	10.712	11.143	11.668	12.339	13.277	14.860

• **Algunos percentiles de la F de Fisher:**

$$F_{\{99,139;5\,\%\}} = 1.353, \qquad F_{\{139,99;5\,\%\}} = 1.366.$$

• Una variable X sigue una **geométrica** de parámetro p si toma los valores $\{1, 2, 3, \dots\}$ con probabilidades

$$\mathbf{P}(X = j) = p(1-p)^{j-1} \qquad \text{para } j = 1, 2, 3, \dots$$

Se tiene que $\mathbf{E}(X) = 1/p$ y $\mathbf{V}(X) = (1-p)/p^2$.

• Una variable X sigue una **binomial** de parámetros n y p si toma los valores $\{0, 1, \dots, n\}$ con probabilidades

$$\mathbf{P}(X = j) = \binom{n}{j} p^j\,(1-p)^{n-j} \qquad \text{para } j = 0, 1, \dots, n.$$

Se tiene que $\mathbf{E}(X) = np$ y $\mathbf{V}(X) = np(1-p)$.