
Probabilidad y Estadística
Segundo del grado en Ingeniería Informática, UAM, 2017-2018

Examen final, 16 de mayo de 2018

1. Se recogen las notas de 7 alumnos de instituto en dos asignaturas, matemáticas y física. Se obtienen los siguientes resultados:

Alumno número	1	2	3	4	5	6	7
Nota en física	2.9	4.0	3.8	6.3	8.6	8.5	9.4
Nota en matemáticas	3.1	4.3	5.1	6.2	6.9	8.3	9.0

(a) Escribe la ecuación de la recta de regresión de Y = nota en física, sobre X = nota en matemáticas.

(b) Calcula el coeficiente de correlación de (X, Y) , e interprétalo.

(c) Usa la recta de regresión para dar una estimación de la nota que podría obtener un alumno en física si ha obtenido un 7.5 en matemáticas.

2. A una cuenta de correo electrónico, el 25 % de mensajes que llegan son de publicidad, el 35 % son de notificaciones de redes sociales, y el resto son de otro tipo. El servidor de correo cuenta con un algoritmo de clasificación, con el que:

- si un mensaje recibido es de publicidad, se envía a la carpeta de correo indeseado (spam) con probabilidad 80 %;
- si el mensaje es de redes sociales, se manda al spam con probabilidad 50 %;
- y si el mensaje es de otro tipo, se envía al spam con probabilidad p .

Se sabe, además, que la probabilidad de que un mensaje genérico acabe en la carpeta de spam es del 41.5 %. Halla

a) la probabilidad de que un mensaje, que no sea de publicidad ni de redes sociales, haya permanecido en la carpeta de entrada;

b) y la probabilidad de que un mensaje que ha sido mandado a la carpeta de spam sea de publicidad.

3. La tortuga pintada occidental tiene un hermoso caparazón verde cubierto de reticulaciones amarillas y naranjas, y un plastrón rojizo sorprendente. Se encuentran en Canadá y el noroeste de Estados Unidos.

Se modela la longitud (en mm) de los estas tortugas con una distribución $N(\mu = 130, \sigma = 2)$.

(a) Elegimos al azar (independientemente unas de otras) 5 tortugas. Calcula la probabilidad de que al menos 4 de ellas tengan una longitud inferior a 132 mm.

(b) Elegimos al azar (independientemente unas de otras) otras 100 tortugas. Si las colocamos en fila, ¿cuál es la probabilidad de que esa fila mida menos de 13600 mm?

Nota: puedes dejar las respuestas en términos de valores de la función $\Phi(x)$ de distribución de una normal estándar.

4. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad conjunta

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{4}{3}(x+xy) & \text{si } (x,y) \in (0,1) \times (0,1), \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

(a) Calcula las esperanzas $\mathbf{E}(X)$ y $\mathbf{E}(Y)$.

(b) Calcula la covarianza entre X y Y . ¿Son incorreladas?

5. Disponemos de una moneda, que tiene una probabilidad p de salir cara, con la que haremos (varias veces) el siguiente experimento: la lanzamos hasta la primera vez que sale cara, y anotamos cuántos lanzamientos han sido necesarios.

Este experimento se ha hecho 7 veces, y se han obtenido los siguientes resultados: 1, 2, 7, 4, 3, 9, 1.

Halla la estimación de p por máxima verosimilitud.

6. Se desea comparar la proporción de viviendas con energía solar en Asturias y en Murcia. Se hace un muestreo en las dos comunidades, con los siguientes resultados:

- Asturias: de 500 viviendas elegidas al azar, 20 disponían de energía solar.
- Murcia: de 1000 viviendas elegidas al azar, 55 disponían de energía solar.

¿Hay suficiente evidencia estadística para concluir, con un nivel de significación del 5%, que la proporción de viviendas con energía solar en Asturias es *menor* que la proporción en Murcia?

Ecuación de la recta de regresión de Y sobre X a partir de unos datos (x, y) :

$$y - \bar{y} = \frac{\text{COV}_{x,y}}{V_x} (x - \bar{x}).$$

Percentiles de la χ^2 con n grados de libertad ($n = 1, \dots, 12$), $\alpha = 5\%$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\chi^2_{\{n;5\% \}}$	3.841	5.991	7.815	9.488	11.070	12.592	14.067	15.507	16.919	18.307	19.675	21.026

Algunos percentiles de la t de Student con n grados de libertad ($n = 1, \dots, 24$):

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$t_{\{n;5\% \}}$	6.314	2.920	2.353	2.132	2.015	1.943	1.895	1.860	1.833	1.812	1.796	1.782
n	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$t_{\{n;5\% \}}$	1.771	1.761	1.753	1.746	1.740	1.734	1.729	1.725	1.721	1.717	1.714	1.711

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$t_{\{n;2.5\% \}}$	12.706	4.303	3.182	2.776	2.571	2.447	2.365	2.306	2.262	2.228	2.201	2.179
n	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$t_{\{n;2.5\% \}}$	2.160	2.145	2.131	2.120	2.110	2.101	2.093	2.086	2.080	2.074	2.069	2.064

Algunos valores de percentiles de la normal estándar:

α	5 %	4.5 %	4.0 %	3.5 %	3.0 %	2.5 %	2.0 %	1.5 %	1.0 %	0.5 %
z_α	1.645	1.695	1.751	1.812	1.881	1.960	2.054	2.170	2.326	2.576

Algunos valores de percentiles $F_{\{n_1, n_2; \alpha\}}$ de la F de Fisher con n_1 y n_2 grados de libertad:

α	2.5 %	5 %	95 %	97.5 %
$F_{\{39, 29; \alpha\}}$	2.033	1.809	0.569	0.510
$F_{\{29, 39; \alpha\}}$	1.962	1.759	0.553	0.492