Probabilidad y Estadística
Segundo del grado en Ingeniería Informática, UAM, 2017-2018

Examen de la convocatoria extraordinaria, 19 de junio de 2018

---

1. (1 punto) En una empresa hay ordenadores con (únicamente) tres sistemas operativos: Mac OS, Windows y Linux. Interesa estudiar las tasas de infección por un cierto troyano. Se dispone de los siguientes datos:

- el 10 % de los ordenadores llevan Mac OS;
- el 5 % de los ordenadores con Mac OS están infectados;
- el 15 % de los ordenadores con Windows están infectados;
- el 1 % de los ordenadores con Linux están infectados;
- el 23 % de los ordenadores infectados usaban Mac OS.

¿Qué proporción de ordenadores con Windows hay en la empresa?

2. (2 puntos) En el estudio de las características de un cierto gusano, interesa analizar el tiempo X que tarda en morir (medido en meses) y el número Y de descendientes que tiene. Se ha decidido que el mejor modelo que explica estas características es el siguiente: la variable X tiene función de densidad dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} 15\Big(1-\dfrac{x}{2}\Big)\left(\dfrac{x}{2}\right)^4 & \text{si } x \in [0,2], \\ 0 & \text{en caso contrario;} \end{cases}$$

mientras que la variable Y puede tomar los valores entre 0 y 4 con las probabilidades que siguen:

valores	0	1	2	3	4
probabilidades	15 %	30 %	30 %	15 %	10 %

(a) Si se toma un gusano al azar, ¿cuántos descendientes esperas que tenga?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que un gusano elegido al azar dure menos de medio mes?

Nota: usa fracciones en este último cálculo.

3. (1.5 puntos) Se modela el peso X (medido en Kg) de un individuo con una normal de media $\mu = 80$ y desviación típica $\sigma = 10$.

(a) Elegimos al azar (independientemente unas de otras) 9 individuos. Calcula la probabilidad de que todos ellos pesen más de 90 Kg.

(b) Elegimos al azar (independientemente unas de otras) otros 9 individuos. Calcula la probabilidad de que la suma de sus pesos sea mayor que 810 Kg.

Nota: puedes/debes dejar las respuestas en términos de valores de la función $\Phi(x)$ de distribución de una normal estándar.

4. (1.5 puntos) Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad conjunta

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} Cx & \text{si } 0 \le x < y \le 1, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

donde C es una cierta constante positiva.

Calcula $\mathbf{E}(X \cdot Y)$.

5. (1 punto) Una cierta variable X tiene función de densidad

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 2\sqrt{\frac{\theta}{\pi}}\, e^{-\theta x^2} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Aquí, θ es un parámetro positivo.

Se ha obtenido una muestra aleatoria de X de tamaño 100: los números $(x_1, \ldots, x_{100})$. De estos números se sabe que su suma vale 23, y que la suma de sus cuadrados vale 20.

Halla la estimación de θ por máxima verosimilitud.

6. (3 puntos) Se dispone de datos sobre el tiempo (medido en milisegundos) que se tarda en dar la respuesta a una cierta pregunta usando dos algoritmos distintos.

- Se ha hecho una muestra aleatoria de tamaño 10 con el algoritmo A, y se ha obtenido un tiempo medio de 83, y una cuasidesviación típica de 5.3.
- En una muestra aleatoria de tamaño 12 con el algoritmo B, se ha obtenido un tiempo medio de 89, y una cuasidesviación típica de 10.

Llamamos X_1 a la variable aleatoria que modela el tiempo de ejecución con el algoritmo A, y X_2 a la que modela ese tiempo de ejecución con el algoritmo B. Se supone normalidad en ambos casos.

a) Halla un intervalo de confianza al 90 % para la varianza de X_1.

b) ¿Hay suficiente evidencia estadística como para concluir, con un nivel de significación del 5 %, que la media de X_2 es mayor que 85?

c) ¿Hay suficiente evidencia estadística como para concluir que la desviación típica de X_2 es mayor que la de X_1?

Percentiles de la χ^2 con n grados de libertad ($n = 1, \ldots, 12$):

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\chi^2_{\{n;5\,\%\}}$	3.841	5.991	7.815	9.488	11.070	12.592	14.067	15.507	16.919	18.307	19.675
$\chi^2_{\{n;95\,\%\}}$	0.004	0.103	0.352	0.711	1.145	1.635	2.167	2.733	3.325	3.940	4.575

Algunos percentiles de la t de Student con n grados de libertad ($n = 1, \ldots, 24$):

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$t_{\{n;5\,\%\}}$	6.314	2.920	2.353	2.132	2.015	1.943	1.895	1.860	1.833	1.812	1.796	1.782
n	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$t_{\{n;5\,\%\}}$	1.771	1.761	1.753	1.746	1.740	1.734	1.729	1.725	1.721	1.717	1.714	1.711

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$t_{\{n;2.5\,\%\}}$	12.706	4.303	3.182	2.776	2.571	2.447	2.365	2.306	2.262	2.228	2.201	2.179
n	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$t_{\{n;2.5\,\%\}}$	2.160	2.145	2.131	2.120	2.110	2.101	2.093	2.086	2.080	2.074	2.069	2.064

Algunos valores de percentiles de la normal estándar:

α	5 %	4.5 %	4.0 %	3.5 %	3.0 %	2.5 %	2.0 %	1.5 %	1.0 %	0.5 %
z_α	1.645	1.695	1.751	1.812	1.881	1.960	2.054	2.170	2.326	2.576

Algunos valores de percentiles $F_{\{n_1,n_2;\alpha\}}$ de la F de Fisher con n_1 y n_2 grados de libertad:

α	1 %	2 %	3 %	4 %	5 %	6 %	7 %	8 %	9 %	10 %
$F_{\{9,11;\alpha\}}$	4.632	3.828	3.398	3.111	2.896	2.726	2.586	2.467	2.364	2.274
$F_{\{11,9;\alpha\}}$	5, 178	4.198	3.688	3.351	3.102	2.908	2.748	2.614	2.498	2.396