Grado en Ingeniería Informática, curso 2017-18
Probabilidad y Estadística — Hoja 5

Estimación puntual de parámetros. Máxima verosimilitud y momentos

1. Dada una muestra aleatoria $x_1, \dots, x_n$ de una variable X, calcula los estimadores de máxima verosimilitud en los siguientes casos:

a) $X \sim$ Bernoulli (p); b) $X \sim$ Poisson (λ); c) $X \sim$ Exponencial (λ).
d) $X \sim N(\mu, \sigma)$ (σ conocido); e) $X \sim N(\mu, \sigma)$ (μ conocido). f) $X \sim N(\mu, \sigma)$.

Nota: la función de densidad de la $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ es $f_{\mu,\sigma}(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$

2. Un árbitro lanza su moneda favorita al principio de cada partido. Si durante un año 26 veces le ha salido cara y 17 veces le ha salido cruz, ¿cuál es la estimación de máxima verosimilitud de la probabilidad de cara en esa moneda?

3. El tiempo (en minutos) de un cierto proceso sigue una distribución exponencial. Halla el estimador de máxima verosimilitud del parámetro de la distribución a partir de la siguiente muestra de 10 tiempos: 5.3, 8.5, 6.6, 10.9, 8.3, 14.8, 5.4, 2.7, 6.3, 4.4.

4. Se han realizado medidas repetidas e independientes entre sí del pH de una cierta solución, obteniéndose los siguientes resultados: 5.12, 5.20, 5.15, 5.17, 5.16, 5.19, 5.15 Suponiendo que estas medidas siguen una distribución $N(\mu, \sigma)$, obtén los estimadores de máxima verosimilitud de μ y σ.

5. El coseno X del ángulo con que emite electrones un proceso radiactivo es una variable aleatoria con función de densidad

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{1+\theta x}{2}, & \text{si } -1 \le x \le 1; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}, \qquad \text{donde } \theta \in [-1, 1].$$

Dada la muestra $x_1, x_2, \dots, x_n$, calcula un estimador de θ por el método de los momentos.

6. La distancia X entre un árbol cualquiera y el árbol más próximo a él en un bosque sigue una distribución de Rayleigh con función de densidad

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 2\theta x e^{-\theta x^2}, & \text{si} \quad x \ge 0; \\ 0, & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

para un cierto parámetro $\theta > 0$. Se dispone de una muestra aleatoria $x_1, x_2, \dots, x_n$. Obtén estimadores de θ por máxima verosimilitud y con el método de los momentos.

Nota: $\int_0^{+\infty} \sqrt{y}\, e^{-y} dy = \sqrt{\pi}/2$.

7. Para estudiar la proporción p de caballos afectados por la peste equina se les va a someter a una prueba. Se sabe que la prueba resulta positiva si el animal está enfermo. Además, si el animal está sano, hay una probabilidad de 4% de que la prueba resulte positiva.

a) Halla la relación entre p (probabilidad de que un caballo esté enfermo) y q (probabilidad de que la prueba resulte positiva).
b) Si se ha realizado la prueba a 500 caballos y resultó positiva en 95 casos, ¿cuál es el estimador de máxima verosimilitud de q? A partir del resultado del apartado i), calcular una estimación de p.

8. En una piscifactoría hay una proporción desconocida de peces de una especie A. Para obtener información sobre esa proporción vamos a ir sacando peces al azar.

a) Si la proporción de peces de la especie A es p, ¿cuál es la probabilidad de que el primer pez de la especie A sea el décimo que extraemos?
b) Tres personas realizan, independientemente unas de otras, el proceso de sacar peces al azar hasta encontrarse con el primero de tipo A y esto ocurre, respectivamente, en las extracciones 10, 15, 18. Obtener el estimador de máxima verosimilitud de p, a partir de esta muestra de tamaño 3.