Probabilidad y Estadística
Segundo del grado en Ingeniería Informática, UAM, 2015-2016

Tercer examen parcial, grupo de mañana, 4 de mayo de 2016

Inicial primer apellido

Apellidos, nombre ....

1. Una variable aleatoria X tiene función de densidad

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{3\theta - 1}(\theta - x^2), & \text{si } x \in [0,1]; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Aquí, θ es un parámetro, $\theta \geq 1$. Se dispone de una muestra $(x_1, \ldots, x_n)$ de la variable X.

Calcula la estimación de θ por momentos.

2. Una variable X toma los siguientes valores con las probabilidades que se indican:

valores	1	2	3	4	5	6
probabilidades	$(1/6 - \theta)$	$(1/6 + \theta)$	$(1/6 - \theta)$	$(1/6 + \theta)$	$(1/6 - \theta)$	$(1/6 + \theta)$

Aquí, θ es un parámetro, $0 \leq \theta \leq 1/6$.

Disponemos de una muestra de tamaño 100 de X formada por 7 unos, 25 doses, 9 treses, 22 cuatros, 4 cincos y 33 seises.

Calcula la estimación de θ por el método de máxima verosimilitud.

3. El número de visitas diarias a una página web sigue una normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. El umbral de rentabilidad de insertar un anuncio en esa página web se ha situado en un número medio de visitas diarias de 1000.

Se analiza el número de visitas durante 20 días consecutivos y se obtienen los siguientes datos: media muestral de visitas 1020; cuasidesviación típica muestral de 25.

Reflexiona sobre conviene insertar o no el anuncio, dado un nivel de significación $\alpha = 5\,\%$.

4. Queremos medir una cierta característica en dos poblaciones. Suponemos que esa característica se distribuye como una normal $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ en la primera población, y como una normal $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$ en la segunda.

En una muestra de tamaño 10 en la primera población, se obtienen una media muestral de 6.1 y una varianza muestral de 4.3.

En la segunda población se hace un muestreo, de tamaño 15, obteniéndose una media muestral 5.1 y una cuasidesviación típica muestral de 2.

Calcula el intervalo de confianza (al 95 %) para el cociente de varianzas σ_1^2/σ_2^2.

5. Recibimos una muestra de longitud 78 formada por 20 unos, 30 doses y 28 treses. Se pide contrastar, con un nivel de significación del 5 %, si esas muestras han sido producidas con el mecanismo que se describe a continuación.

Se lanzan dos monedas: la primera sale cara con probabilidad 40 %; la segunda, con probabilidad 50 %. Si salen dos caras, anotamos un 1; si salen dos cruces, anotamos un 2; y en el resto de los casos, anotamos un 3.

Percentiles de la χ^2 con n grados de libertad ($n = 1, \ldots, 12$), $\alpha = 5\,\%$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\chi^2_{\{n;5\,\%\}}$	3.841	5.991	7.815	9.488	11.070	12.592	14.067	15.507	16.919	18.307	19.675	21.026

Algunos percentiles de la t de Student con n grados de libertad ($n = 1, \ldots, 24$):

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$t_{\{n;5\,\%\}}$	6.314	2.920	2.353	2.132	2.015	1.943	1.895	1.860	1.833	1.812	1.796	1.782
n	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$t_{\{n;5\,\%\}}$	1.771	1.761	1.753	1.746	1.740	1.734	1.729	1.725	1.721	1.717	1.714	1.711

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$t_{\{n;2.5\,\%\}}$	12.706	4.303	3.182	2.776	2.571	2.447	2.365	2.306	2.262	2.228	2.201	2.179
n	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$t_{\{n;2.5\,\%\}}$	2.160	2.145	2.131	2.120	2.110	2.101	2.093	2.086	2.080	2.074	2.069	2.064

Algunos valores de percentiles de la normal estándar:

α	5 %	4.5 %	4.0 %	3.5 %	3.0 %	2.5 %	2.0 %	1.5 %	1.0 %	0.5 %
z_α	1.645	1.695	1.751	1.812	1.881	1.960	2.054	2.170	2.326	2.576

Algunos valores de percentiles $F_{\{n_1,n_2;\alpha\}}$ de la F de Fisher con n_1 y n_2 grados de libertad:

α	2.5 %	5 %	95 %	97.5 %
$F_{\{15,10;\alpha\}}$	3.522	2.845	0.393	0.327
$F_{\{14,9;\alpha\}}$	3.798	3.025	0.378	0.312
$F_{\{10,15;\alpha\}}$	3.060	2.544	0.351	0.284
$F_{\{9,14;\alpha\}}$	3.209	2.646	0.331	0.263

Probabilidad y Estadística
Segundo del grado en Ingeniería Informática, UAM, 2015-2016

Tercer examen parcial, grupo de tarde, 4 de mayo de 2016

Inicial primer apellido

Apellidos, nombre ....

1. Una urna contiene bolas azules y rojas. En total hay 120 bolas. Para estimar la proporción p de bolas azules se selecciona una muestra de tamaño 10 con reemplazamiento y se obtiene la serie

$$(A, A, A, R, R, A, R, R, A, A).$$

Calcula la estimación de p por el método de máxima verosimilitud.

2. Una variable aleatoria X tiene función de densidad

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta\, x^{\theta-1}, & \text{si } x \in [0,1]; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Aquí, θ es un parámetro, $\theta \geq 1$. Se dispone de una muestra $(x_1, \ldots, x_n)$ de la variable X.

Calcula la estimación de θ por momentos.

3. El medicamento usado tradicionalmente para una cierta dolencia es eficaz en el 60 % de los casos. Los resultados experimentales sobre un nuevo medicamento administrado a una muestra de 144 personas que sufrían esta dolencia muestran 100 casos con alivio. ¿Se puede concluir, al nivel $\alpha = 5\,\%$ de significación, que el nuevo medicamento es más efectivo que el antiguo?

4. Queremos medir una cierta característica en dos poblaciones. Suponemos que esa característica se distribuye como una normal $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ en la primera población, y como una normal $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$ en la segunda, donde $\sigma_1 = 2$ y $\sigma_2 = 1/2$.

Para estimar la diferencia $\mu_1 - \mu_2$, se tomará una muestra de tamaño n en la primera población, y una de tamaño $2n$ en la segunda.

Calcula el mínimo valor de n para el que el error máximo en la estimación de $\mu_1 - \mu_2$ (al nivel de confianza del 95 %) sea de 0.1.

5. Con objeto de contrastar la hipótesis de equiprobabilidad en el nacimientos de hijos e hijas, se estudiaron 200 familias de 4 hijos, con los resultados siguientes:

número de hijos varones	0	1	2	3	4
número de familias	6	39	90	52	13

Se supone que el número de hijos varones sigue una distribución binomial $\text{BIN}(4, 50\,\%)$. Contrasta esa hipótesis al nivel $\alpha = 5\,\%$ de significación.

Percentiles de la χ^2 con n grados de libertad ($n = 1, \ldots, 12$), $\alpha = 5\,\%$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\chi^2_{\{n;5\,\%\}}$	3.841	5.991	7.815	9.488	11.070	12.592	14.067	15.507	16.919	18.307	19.675	21.026

Algunos percentiles de la t de Student con n grados de libertad ($n = 1, \ldots, 24$):

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$t_{\{n;5\,\%\}}$	6.314	2.920	2.353	2.132	2.015	1.943	1.895	1.860	1.833	1.812	1.796	1.782
n	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$t_{\{n;5\,\%\}}$	1.771	1.761	1.753	1.746	1.740	1.734	1.729	1.725	1.721	1.717	1.714	1.711

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$t_{\{n;2.5\,\%\}}$	12.706	4.303	3.182	2.776	2.571	2.447	2.365	2.306	2.262	2.228	2.201	2.179
n	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$t_{\{n;2.5\,\%\}}$	2.160	2.145	2.131	2.120	2.110	2.101	2.093	2.086	2.080	2.074	2.069	2.064

Algunos valores de percentiles de la normal estándar:

α	5 %	4.5 %	4.0 %	3.5 %	3.0 %	2.5 %	2.0 %	1.5 %	1.0 %	0.5 %
z_α	1.645	1.695	1.751	1.812	1.881	1.960	2.054	2.170	2.326	2.576

Algunos valores de percentiles $F_{\{n_1,n_2;\alpha\}}$ de la F de Fisher con n_1 y n_2 grados de libertad:

α	2.5 %	5 %	95 %	97.5 %
$F_{\{15,10;\alpha\}}$	3.522	2.845	0.393	0.327
$F_{\{14,9;\alpha\}}$	3.798	3.025	0.378	0.312
$F_{\{10,15;\alpha\}}$	3.060	2.544	0.351	0.284
$F_{\{9,14;\alpha\}}$	3.209	2.646	0.331	0.263