Grado en Ingeniería Informática, curso 2015-16
Probabilidad y Estadística Hoja 3

Variables aleatorias

Cálculos con variables aleatorias

1. Una compañía de refrescos anuncia premios en las chapas asegurando que en cada 1000 chapas hay 500 con "inténtelo otra vez", 300 con premio de 50 céntimos de euro, 150 con premio de un euro, 40 con premio de 5 euros y 10 con premio de 10 euros. Cada botella se vende a 1 euro.

a) Un individuo, al que no gusta el refresco, decide comprar una botella. Sea X la variable aleatoria que registra *la ganancia* del individuo, es decir, el premio obtenido menos el precio de la botella. Halla la función de masa, la media, la varianza y la desviación típica de X. Calcula la probabilidad de que pierda dinero.
b) Supongamos que el individuo de arriba sólo tiene 1 euro y decide que comprará botellas hasta que obtenga un premio mayor a un euro o no tenga suficiente dinero para comprar la siguiente. Sea Y la variable aleatoria que registra el *dinero que tiene el individuo cuando deja de comprar botellas del refresco.* Halla la función de masa, la media, la varianza y la desviación típica de Y. Calcula la probabilidad de que pierda dinero.

2. La variable X toma los valores $0, 2, 4, 6, \ldots, 100$ (son 51 valores) con probabilidades

$$\mathbf{P}(X = 2j) = \frac{1}{25 \cdot 51}\, j \qquad \text{para } j = 0, 1, 2, \ldots, 50.$$

Calcula $\mathbf{E}(X)$.

3. Halla, para una variable aleatoria continua X con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si} \quad 0 < x < 1; \\ k - x, & \text{si} \quad 1 \le x < 2; \\ 0, & \text{si} \quad 2 \le x\,, \end{cases}$$

a) la constante k.
b) la función de distribución de X;
c) la probabilidad de que X esté comprendida entre 1 y 2;
d) la probabilidad de que X sea menor que 1;
e) sabiendo que X es mayor que 0.5, la probabilidad de que sea menor que 1.5.

4. La función de densidad de una variable aleatoria continua es:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b, & \text{si} \quad x \in (0, 2); \\ 0, & \text{en caso contrario}\,. \end{cases}$$

Determina a y b, sabiendo que $\mathbf{P}(0.5 < x \le 1) = 0.1357$. Halla $\mathbf{E}(X)$.

5. La acidez X de cierto compuesto depende de la proporción Y de uno de sus componentes químicos y viene dada por la relación $X = (1 + Y)^2$. La proporción Y es una variable aleatoria con función de densidad

$$f(y) = \begin{cases} 2y, & \text{si} \quad y \in (0, 1); \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Calcula la función de densidad y la función de distribución de X. Calcula la media y la desviación típica de X y de Y.

6. En un examen se plantean 10 cuestiones con respuesta verdadero/falso. Se aprueba si al menos 7 respuestas son acertadas. ¿Cuál es la probabilidad de aprobar si se responde a todo al azar? ¿Y si nos "sabemos" el 30% de la asignatura?

7. Suponiendo que la probabilidad de que un niño que nace sea varón es 0.51, halla la probabilidad de que una familia de 6 hijos tenga:

a) por lo menos una niña;
b) por lo menos un niño;
c) por lo menos dos niños y una niña.

8. Una compañía de seguros con 11200 asegurados "sabe" que el 0.005% de la población fallece cada año a consecuencia de un cierto tipo de accidente.

a) Halla la probabilidad de que la compañía tenga que pagar a más de 3 asegurados por fallecimiento en un año determinado.
b) ¿Cuál es el número medio de accidentes por año?

9. El número de erratas por página en un libro sigue una distribución de Poisson. En una muestra de 100 páginas se han observado las siguientes frecuencias:

Número de erratas	0	1	2	3	4	5
Frecuencia	27	37	23	9	2	2

Estima el parámetro λ de la Poisson. (Sugerencia: mínimos cuadrados en el ordenador).

Halla la probabilidad de que en una página tomada al azar haya alguna errata. ¿Cuál es la probabilidad de que un libro de 20 páginas no tenga erratas?

10. El tiempo medio hasta que se produce un fallo en un sistema de alarma es de 6 meses. Se supone que el tiempo entre dos fallos consecutivos sigue una distribución exponencial.

a) Calcula la probabilidad de que la alarma tarde más de un mes en fallar. (Supóngase que todos los meses tienen igual número de días.)
b) En un mismo edificio se instalan 10 de estas alarmas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 6 de estas alarmas tarden en fallar más de un mes?

11. Un pájaro de cierta especie come vorazmente mariposas de una población muy grande. Estas mariposas pueden comer, a su vez, de una planta venenosa, de manera que si el pájaro come una mariposa envenenada, deja de comer mariposas ese día. Suponiendo que el 40% de la población de mariposas come de la planta venenosa, halla el número medio de mariposas comidas en un día por el pájaro.

12. La intensidad de un impulso sigue una variable aleatoria x con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 2x/9, & \text{si} \quad x \in (0,3); \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

(a) Calcula la intensidad media del impulso.
(b) Si medimos 90 impulsos independientes, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente tres tengan una intensidad inferior a 0.3?

13. En una población, la cantidad de plomo X presente en la sangre de una persona elegida al azar es una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} x/5, & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2; \\ (10-2x)/15, & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 5; \\ 0, & \text{si} \quad x \leq 0 \quad \text{ó} \quad x \geq 5. \end{cases}$$

a) Calcula la cantidad media de plomo en la sangre de los individuos de la población.

b) Elegimos una persona al azar. Halla la probabilidad de que la cantidad de plomo en su sangre sea inferior a 2.

c) Calcula la probabilidad de que en 150 personas elegidas al azar haya entre 58 y 63 personas con una cantidad de plomo inferior a 2.

Sobre la normal

14. Halla el área que queda bajo la curva normal en los siguientes casos: a) A la derecha de 1.25. b) A la izquierda de -0.40. c) Entre -1.35 y 1.35. d) Fuera del intervalo de -1.5 a 1.5.

15. El cociente de inteligencia IQ es una variable X que se distribuye según una $N(100, 15)$.

a) Calcula la probabilidad de que un individuo elegido al azar tenga un IQ superior a 120.

b) Suponiendo que un individuo con carrera universitaria debe tener un IQ superior a 110, halla la probabilidad de que un licenciado tenga un IQ superior a 120.

16. Sea Z una variable normal de media $\mu = 1$ y desviación típica $\sigma = 2$. Calcula el valor de a para el que $\mathbf{P}(|Z| < a) = 95\%$.

17. Un botánico ha observado que la anchura X de las hojas del álamo sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$ con $\mu = 6$ cm, y que el 90% de las hojas tiene una anchura inferior a 7.5 cm. Halla σ y la probabilidad de que una hoja mida más de 8 cm.

18. La anchura en milímetros de una población de coleópteros sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$. Se estima que el 77% de la población mide menos de 12 mm y que el 84% mide más de 7 mm. Halla μ y σ.

19. El peso de una gacela (en kg) es una variable aleatoria X que se distribuye según una $N(50, 6)$. Si capturamos 10 gacelas, se pide:

a) Indica la distribución de la variable aleatoria $Y =$“número de gacelas de las 10 capturadas que pesan menos de 47 kg” y calcula $\mathbf{P}(Y = 2)$.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que podamos transportar las 10 gacelas en un vehículo que admite una carga de 438 kg? ¿Y si admite una carga de 465 kg?

20. La longitud (en mm) de un tornillo salido de fábrica es una variable aleatoria $N(10, 1)$. El tornillo se considera desechable si su longitud es menor de 8 mm o mayor de 12 mm. Se empaquetan los tornillos en cajas de 101 tornillos. El fabricante se compromete a devolver toda caja con más de un tornillo defectuoso. Calcula la probabilidad de devolver una caja.