Planteamiento (y resolución) de ecuaciones en recurrencias

1. Disponemos de n cerillas para formar palabras con las letras I (una cerilla) y V (dos cerillas). Sea P_n el número de palabras diferentes que se pueden formar utilizando las n cerillas.
   (a) Halla una fórmula de recurrencia para P_n.
   (b) ¿Qué relación tienen los P_n con los números de Fibonacci, F_n, definidos por la relación $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$? Justifica la respuesta.
   (c) Sea $P_{n,k}$ el número de palabras contadas en P_n que tienen k letras. Calcula $P_{n,k}$.
   (d) Utiliza los apartados b) y c) para demostrar la fórmula $F_{n+1} = \sum_k \binom{n-k}{k}$
2. Nos regalan tres sellos y decidimos iniciar una colección. El año siguiente la incrementamos con 8 sellos más. Si cada año compramos un número de sellos igual al doble de los que compramos el año anterior, ¿al cabo de cuántos años habremos superado el millón de sellos?
3. Sea $M = \{A, B, C\}$ y sea S_n el número de listas de longitud n formadas con las letras de M que tienen las letras A en bloques de longitud par. Encuentra una relación de recurrencia para calcular S_n y resuélvela.
4. (a) Encuentra la relación de recurrencia correspondiente al número de listas binarias de longitud n que no tienen unos consecutivos y halla una expresión explícita para dichas cantidades. (b) ¿Y en el caso de listas ternarias?
5. Consideramos la sucesión de números (I_n) dada por
$$I_n = \int_0^1 x^n e^x dx, \qquad n \geq 0.$$
   (a) Comprueba que la sucesión (I_n) verifica la recurrencia $I_n = e - nI_{n-1}$, para $n \geq 1$, junto con la condición inicial $I_0 = e - 1$.

   (b) Para resolver la relación anterior, vamos a hacer un "cambio de variables": considera la sucesión (J_n) dada por
$$J_n = (-1)^{n+1} \frac{I_n}{n!\, e} \qquad \text{para cada } n \geq 0.$$
   y verifica que
$$J_n = J_{n-1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \qquad \text{para cada } n \geq 1.$$
   (c) Obtén una fórmula para J_n y deduce la correspondiente fórmula para I_n.

Resolución de ecuaciones de recurrencia lineales

6. Encuentra fórmulas explícitas para los términos de las sucesiones definidas por:
$$\begin{array}{llll} (a) & u_0 = 0, u_1 = 1, & u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}, & n \geq 2; \\ (b) & u_0 = 1, u_1 = 3, & u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n, & n \geq 0. \end{array}$$
7. Resuelve las siguientes relaciones de recurrencia:
$$\begin{array}{lll} (a) & u_{n+1} - u_n = 3n^2 - n & \text{para } n \geq 0, \text{ con } u_0 = 3; \\ (b) & u_{n+1} - 2u_n = 2^n & \text{para } n \geq 0, \text{ con } u_0 = 1; \\ (c) & u_{n+2} + 4u_{n+1} + 4u_n = 7 + n + n^2 & \text{para } n \geq 0, \text{ con } u_0 = 0 \text{ y } u_1 = 2; \\ (d) & u_{n+2} - 6u_{n+1} + 9u_n = 3 \times 2^n + 7 \times 3^n & \text{para } n \geq 0, \text{ con } u_0 = 0 \text{ y } u_1 = 4. \end{array}$$