

CODIFICACIÓN DE SUCESIONES CON FUNCIONES GENERATRICES

1. Halla las funciones generatrices de las sucesiones siguientes:

- (a) $((\binom{8}{0}), (\binom{8}{1}), \dots, (\binom{8}{8}), 0, 0, \dots)$
 (b) $(0, (\binom{8}{1}), 2(\binom{8}{2}), \dots, 8(\binom{8}{8}), 0, 0, \dots)$
 (c) $(1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$
 (d) $(0, 0, 0, 1, 1, 1, \dots)$
 (e) $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$

2. Determina la sucesión generada por cada una de las siguientes funciones generatrices:

- (a) $f(x) = (2x - 3)^3$ (d) $f(x) = \frac{1}{1 + 3x}$
 (b) $f(x) = \frac{x^4}{1 - x}$ (e) $f(x) = \frac{1}{1 - x} + 3x^7 - 11$
 (c) $f(x) = \frac{x^3}{1 - x^2}$ (f) $f(x) = \frac{1 + 3x - x^2 + 3x^3 - x^4}{1 - 3x + 3x^2 - x^3}$.

3. Halla el coeficiente de x^{31} en $(1 + x + x^2 + \dots)^k$, $k \in \mathbb{N}$.

APLICACIONES DE LA TÉCNICA DE LAS FUNCIONES GENERATRICES

4. Resuelve los ejercicios 6 y 7 de la hoja 6-1 con la técnica de las funciones generatrices.

5. Obtén, utilizando funciones generatrices, los valores de las siguientes sumas:

$$a) \sum_k k \binom{n}{k}; \quad b) \sum_k 3^{-k} \binom{n}{k}; \quad c) \sum_{k=1}^n k^2; \quad d) \sum_n \frac{n^2}{3^n}.$$

6. Para cada $n \geq 0$, definimos

$$a_n = \sum_k \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2^k}.$$

(a) Calcula el valor de a_n .

(b) Calcula el valor de la suma $\sum_n \binom{n+1}{2} a_n$.

7. La sucesión de números $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ está definida mediante

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 3, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + c_{n-2} \quad \text{para } n \geq 2,$$

donde $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una cierta sucesión cuya función generatriz es $g(x)$. Expresa, en términos de $g(x)$, la función generatriz $f(x)$ asociada a la sucesión $\{a_n\}$.

8. En una frutería se dispone de las siguientes frutas: manzanas, plátanos, naranjas y peras. Calcula el número de formas distintas de llenar una bolsa con n frutas respetando las siguientes restricciones:

- El número de manzanas debe ser par.
- El número de plátanos debe ser múltiplo de 5.
- Hay como mucho 4 naranjas.
- Hay como mucho 1 pera.