Recurrencias y sumas con funciones generatrices

1. Definimos la sucesión $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ mediante

$$a_0 = 1, a_1 = 1, \qquad a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + \frac{1}{2^n}\,, \quad \text{para cada } n \geq 2.$$

a) Halla la función generatriz de la sucesión (a_n).
b) Deduce una fórmula para los números a_n.

2. La sucesión de números $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ está definida mediante

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 3, \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + c_{n-2} \qquad \text{para } n \geq 2,$$

donde $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ es una cierta sucesión cuya función generatriz es $g(x)$. Expresa, en términos de $g(x)$, la función generatriz $f(x)$ asociada a la sucesión (a_n).

3. Definimos la sucesión $(M_n)_{n=1}^{\infty}$ mediante

$$M_1 = 1, \qquad M_n = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)\, M_j\,, \quad \text{para cada } n \geq 2.$$

a) Comprueba que la función generatriz de la sucesión (M_n) viene dada por

$$M(x) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n\, x^n = \frac{x(1-x)}{1-3x+x^2}.$$

b) La función $M(x)$ se puede desarrollar en serie de potencias usando fracciones simples. Proponemos el siguiente método alternativo, que usa números de Fibonacci. Sabiendo que

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n\, x^n = \frac{x}{1-x-x^2},$$

comprueba que

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{2n}\, x^n = \frac{x}{1-3x+x^2}.$$

c) Obtén una expresión para los números M_n en términos de números de Fibonacci.

4. Comprueba que

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+1}\, x^n = \frac{1-x}{1-3x+x^2}.$$

Deduce que, para cada $n \geq 1$,

$$F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}.$$

5. Para cada $n \geq 0$, definimos

$$a_n = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2^k}\,.$$

a) Calcula el valor de a_n.
b) Calcula el valor de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{2} a_n\,.$$

6. Comprueba que, para cada $n \geq 0$,

$$\sum_{k\geq 0} \binom{n+k}{2k} 2^{n-k} = \frac{2}{3}\, 4^n + \frac{1}{3}.$$

Multiconjuntos, particiones y funciones generatrices

7. En una frutería se dispone de las siguientes frutas: manzanas, plátanos, naranjas y peras. Calcula el número de formas distintas de llenar una bolsa con n frutas respetando las siguientes restricciones:

- El número de manzanas debe ser par.
- El número de plátanos debe ser múltiplo de 5.
- Hay como mucho 4 naranjas.
- Hay como mucho 1 pera.

8. Llamamos $F_{n,k}$ al número de listas de longitud k formadas con unos y doses, y tales que la suma de sus elementos vale n.

a) Para $k \geq 1$ fijo, halla una expresión para

$$F_k(x) = \sum_{n\geq 0} F_{n,k}\, x^n.$$

b) Deduce del apartado anterior una fórmula para los números $F_{n,k}$.

c) Comprueba que, para $n \geq 1$,

$$\sum_{k} F_{n,k} = F_{n+1}.$$

9. Escribe la función generatriz de la sucesión $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, donde a_n cuenta las particiones de n en las que cada parte aparece a lo sumo 3 veces.