Codificación de sucesiones con funciones generatrices

1. Halla las funciones generatrices de las siguientes sucesiones:

(a) $\left(0, \binom{20}{1}, 2\cdot\binom{20}{2}, 3\cdot\binom{20}{3}\dots, 20\cdot\binom{20}{20}, 0, 0, \dots\right)$

(b) $\left(0, \binom{20}{1}, 2^2\cdot\binom{20}{2}, \dots, 20^2\cdot\binom{20}{20}, 0, 0, \dots\right)$

(c) $\left(0, 0, 1\cdot 2\cdot\binom{20}{2}, 2\cdot 3\cdot\binom{20}{2}\dots, 19\cdot 20\cdot\binom{20}{20}, 0, 0, \dots\right)$

(d) $(1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$

(e) $(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, \dots)$

(f) $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$

2. Calcula

$$\sum_{j=0}^{20}\binom{20}{j}\frac{j}{2^j} \qquad \text{y} \qquad \sum_{j=0}^{25}\binom{25}{j} j\cdot(j-1)\cdot 3^j.$$

3. Determina la sucesión asociada a cada una de las siguientes funciones generatrices:

(a) $f(x) = (2x-3)^3$ (d) $f(x) = \dfrac{1}{1+3x}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^4}{1-x}$ (e) $f(x) = \dfrac{1}{1-x} + 3x^7 - 11$

(c) $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2}$ (f) $f(x) = \dfrac{1+3x-x^2+3x^3-x^4}{1-3x+3x^2-x^3}$.

4. Si $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ son las funciones generatrices de las sucesiones (a_n), (b_n) y (c_n), respectivamente, ¿cuáles son los coeficientes de la función $t(x) = f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)$?

5. Halla el coeficiente de x^{31} en $(1+x+x^2+\cdots)^k$, donde k es un cierto número natural.

6. Sea $f(x)$ es la función generatriz de la sucesión (a_n).

a) Comprueba que la función

$$g_2(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

genera la sucesión $(a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, a_6, \dots)$.

b) Comprueba que

$$g_4(x) = \frac{f(x)+f(ix)+f(-x)+f(-ix)}{4}$$

genera la sucesión $(a_0, 0, 0, 0, a_4, 0, 0, 0, a_8, 0, \dots)$.

c) Obtén fórmulas explícitas de las funciones generatrices de las sucesiones

$$\left(0, 1, 0, \frac{1}{3!}, 0, \frac{1}{5!}, 0, \frac{1}{6!}, 0, \dots\right) \qquad \text{y} \qquad \left(1, 0, 0, 0, \frac{1}{4!}, 0, 0, 0, \frac{1}{8!}, 0, \dots\right)$$

Ejercicios adicionales

7. Comprueba que para $k \geq 1$ se tiene que

$$\sum_{j\geq 0}\binom{k}{3j} = \frac{1}{3}\Big(2^k + 2\cos\left(\tfrac{k\pi}{3}\right)\Big), \qquad \sum_{j\geq 0}\binom{k}{4j} = \frac{1}{4}\Big(2^k + 2\, 2^{k/2}\cos\left(\tfrac{k\pi}{4}\right)\Big).$$

8. Sea $f(x)$ la función generatriz de la sucesión (a_n) y sea $N \geq 1$. Escribe, en términos de $f(x)$, la expresión de la función $g_N(x)$ cuya lista de coeficientes viene dada por

$$(a_0, 0, \dots, 0, a_N, 0, \dots, 0, a_{2N}, 0, \dots).$$

(Sugerencia: raíces N-ésimas de la unidad, esto es, las soluciones de $x^N = 1$)