Grado en Matemáticas, curso 2016-17
Matemática Discreta — Hoja 4

Sobre grafos

1. Halla el número de vértices de los siguientes grafos simples:

(a) G tiene 9 aristas y todos sus vértices son de grado 3.
(b) G es un grafo regular con 15 aristas.
(c) G tiene 10 aristas, dos de sus vértices son de grado 4, y los restantes de grado 3.

2. Describe (es decir, nombra, dibuja...) o explica por qué no puede existir:

(a) un grafo con 7 vértices, todos de grado 3;

(b) un grafo con 15 vértices y 105 aristas;

(c) dos grafos no isomorfos, cada uno con 6 vértices, todos de grado de 2;

(d) un grafo conexo con 8 vértices y cuya sucesión de grados sea $(1,1,1,2,3,4,5,7)$.

(e) un grafo con 20 vértices y sucesión de grados

$$(\underbrace{1,1,1}_{3},\underbrace{2,2,2,2,2,2,2,2,2}_{9},\underbrace{3,3,3,3,3}_{5},\underbrace{4,4}_{2},\underbrace{5}_{1});$$

(f) un grafo conexo con 25 vértices y sucesión de grados

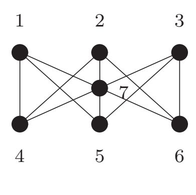
$$(\underbrace{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1}_{12},\underbrace{2,2,2,2,2,2,2,2,2}_{9},\underbrace{3,3}_{2},\underbrace{4,4}_{2}).$$

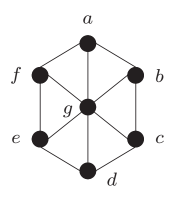
3. Demuestra que en todo grafo G conexo con más de dos vértices tiene que haber al menos 2 vértices con el mismo grado.

4. Comprueba que hay (y dibuja/describe)

- 4 grafos no isomorfos con tres vértices;
- 11 grafos no isomorfos con cuatro vértices;
- 34 grafos no isomorfos con cinco vértices;

5. Demuestra que los dos siguientes grafos son isomorfos. ¿Cuántos isomorfismos distintos hay entre ellos?

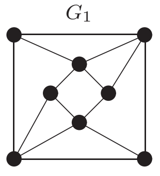




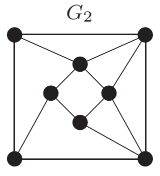
6. Estudia si son isomorfos los siguientes grafos:

a)

G_1

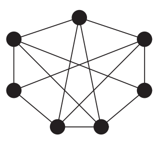


G_2

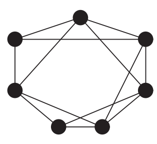


b)

G_3



G_4



7. Prueba que en un grafo G con n vértices y $p \geq 1$ componentes conexas se tiene que

$$n - p \leq |A(G)| \leq \frac{1}{2}\,(n-p)\,(n-p+1)\,.$$

8. En una reunión de 20 personas hay, en total, 48 pares de personas que se conocen.

(a) Justifica por qué hay, el menos, una persona que a lo sumo conoce a otras cuatro.
(b) Supongamos que sólo hay una persona que conoce a lo sumo a cuatro personas. ¿A cuántas personas conoce exactamente?

9. Cuatro parejas celebran una fiesta. Al terminar, uno de los ocho preguntó a los demás a cuántas habían saludado al llegar, recibiendo una respuesta diferente de cada uno. ¿A cuántos había saludado la persona que hizo la pregunta? ¿Y su pareja?

Sobre árboles

10. ¿Existen árboles de siete vértices y con

a) cinco vértices de grado 1 y dos de grado 2?;
b) vértices de grados $(1,1,1,2,2,2,3)$?

11. Halla el número de árboles distintos que se pueden formar con los vértices $\{1,2,\ldots,n\}$ si

(a) $n=6$ y cuatro vértices tienen grado 2;
(b) $n=5$ y exactamente tres vértices tienen grado 1.
(c) $n=8$, dos de los vértices tienen grado 4 y los seis restantes tienen grado 1.

12. Si G es árbol con p vértices de grado 1 y q vértices de grado 4, y ningún otro vértice, ¿qué relación hay entre p y q? Dibuja un árbol que cumpla estas condiciones con q arbitrario.

13. Un bosque es un grafo sin ciclos. Prueba que, si G es un bosque, entonces $|A(G)| = |V(G)| - p$, donde p es el número de componentes conexas de G.

14. Sea G el grafo que se obtiene al unir n triángulos en un vértice común ($|V(G)| = 2n+1$ y $|A(G)| = 3n$). ¿Cuántos árboles abarcadores tiene G?

15. Prueba combinatoriamente que el número de árboles abarcadores distintos del grafo bipartito completo $K_{3,s}$ es $s^2 \cdot 3^{s-1}$.

Ejercicios adicionales

16. Sea $G = (V, A)$ un grafo con n vértices. Se define su *grafo complementario* G^{C} como aquél que tiene los mismos vértices que G y las aristas que le "faltan" a G. Esto es,

$$V(G^{\mathrm{C}}) = V(G) \qquad \text{y} \qquad A(G^{\mathrm{C}}) = A(K_n) \setminus A(G)\,.$$

(a) Demuestra que $G = (V, A)$ y $G' = (V', A')$ son isomorfos si y sólo si sus complementarios son isomorfos.
(b) Si G tiene n vértices y su sucesión de grados es $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$, ¿cuál es la sucesión de grados de su complementario?
(c) Encuentra dos grafos con 5 vértices que sean isomorfos a sus (respectivos) complementarios.
(d) Escribe una condición *necesaria* sobre el número de vértices de un grafo para que sea isomorfo a su complementario.

17. El teorema de Kirchhoff afirma que el número de árboles abarcadores de un grafo G con matriz de vecindades M coincide con un cofactor cualquiera de la matriz diferencia $L = D - M$, donde D es la matriz diagonal cuyos registros son los grados de los vértices. O también con el producto de los autovalores no nulos de L (dividido por el número de vértices).

Aplica este resultado al grafo completo K_n y deduce la fórmula de Cayley para el número de árboles distintos con n vértices.