Sobre coeficientes binómicos/multinómicos y aplicaciones

1. Demuestra con argumentos combinatorios las siguientes identidades:

   (a) $\displaystyle\binom{2n}{n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}\binom{n}{k+1}$ (b) $\displaystyle\binom{n+1}{k+1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{k}$ (c) $\displaystyle\binom{2n}{n}^2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(n-k)!^2\, k!^2}$

   Sugerencias. Recuerda la propiedad de simetría para el apartado (a). Clasifica los conjuntos en función de su mayor elemento para el apartado (b). Para (c), cuenta el número de maneras de elegir dos subconjuntos de tamaño n de $\{1,\dots,2n\}$ no necesariamente disjuntos.

2. Se lanzan 3 dados indistinguibles. ¿Cuántos posibles resultados (no cuántas sumas, sino cuántos posibles valores de los 3 dados) pueden obtenerse? ¿Y si fueran n dados indistinguibles?

3. ¿De cuántas formas se puede confeccionar una lista de 12 términos con las letras a, b y c de forma que aparezcan dos aes, dos bes y ocho ces, y además cada a y cada b tengan una c a ambos lados?

4. Tenemos una moneda regular. Calcula la probabilidad de que, si la lanzamos 10 veces, salgan entre 4 y 6 caras (ambas incluidas). Calcula también la probabilidad de que, al lanzarla 100 veces, salgan entre 47 y 53 caras. Calcula numéricamente[1] ambas probabilidades, compáralas y extrae tus conclusiones.

5. Calcula la probabilidad de que, al lanzar 5 dados, la suma de los dados sea 18.

6. Obtén una fórmula para el número de palabras de longitud $4n$ que podemos formar con los bloques `as` y `coco`.

7. (a) Comprueba que el número de listas de longitud n con ceros y unos en las que hay exactamente r unos y que no tienen unos consecutivos es $\binom{n-r+1}{r}$.

   (b) ¿De cuántas formas distintas se puede extraer de $\{1,2,\dots,n\}$ un conjunto de r números de forma que no haya dos consecutivos?

8. Consideramos el conjunto de símbolos $X = \{1,2,3,\dots,50\}$. Diremos que un subconjunto A de X está *separado* si la diferencia entre cualesquiera dos de sus elementos es al menos tres unidades. Por ejemplo, $\{10,15,17,40\}$ no está separado, mientras que $\{10,15,18,40\}$ sí lo está. ¿Cuántos subconjuntos separados distintos de cinco elementos se pueden formar con los elementos de X?

9. Una torre de ajedrez está situada en la casilla inferior izquierda del tablero (8×8), con la intención de llegar a la esquina opuesta en cuatro movimientos, avanzando en cada uno de ellos hacia arriba o hacia la derecha. ¿De cuántas maneras lo puede hacer? (*Nota*: la torre no puede quedarse quieta en ninguno de los 4 movimientos).

10. Tenemos una baraja española "defectuosa", cuyas 40 cartas son todas de oros, de manera que las 10 cartas del palo de oros están repetidas 4 veces. ¿De cuántas formas podemos ordenarla?

[1] Con tu software matemático favorito. Aparentemente, se puede usar el servidor de Sage `cosmos.mat.uam.es`. La instrucción para calcular $\sum_{n=0}^{k}\binom{N}{n}$ es: `sum([binomial(N,n) for n in srange(k+1)])`.

11. En el programa *Cifras y letras* han aparecido las letras `AHUCAMEEN`. ¿Cuántas palabras (con o sin sentido) de longitud 6 se pueden formar?

12. Llamamos $D_n(k)$ al número de permutaciones de $\{1, 2, \dots, n\}$ que fijan exactamente k elementos. Da una fórmula para $D_n(k)$ en función del número de desbarajustes de cierto número de elementos.

13. Observa que
$$\sum_{k=0}^{n} D_n(k) = n!.$$
Prueba que
$$\sum_{k=0}^{n} kD_n(k) = n!$$
y deduce que, *en media*, una permutación deja fijo *un* elemento.

    Sugerencia. Usa el ejercicio anterior, la propiedad de simetría de los coeficientes binómicos y la observación de que $(n-j)\binom{n}{j} = n\binom{n-1}{j}$.

Sobre particiones de conjuntos y de enteros

14. Demuestra que
$$\frac{k^n}{k^k} \leq S(n,k) \leq \frac{k^n}{k!}.$$
Sugerencia: puedes usar la fórmula de recurrencia de $S(n,k)$ y el recuento de aplicaciones sobreyectivas en términos de números de Stirling de segunda especie.

15. (a) Comprueba que
$$S(n, n-1) = \binom{n}{2} \quad \text{y que} \quad S(n, n-2) = \binom{n}{3} + \frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}.$$
Halla una fórmula análoga para $S(n, n-3)$.

    (b) Sabemos que $S(n,2) = \frac{2^n-2}{2}$. Halla una fórmula para $S(n,3)$.

16. Consideramos n ciudades. Durante $2n$ días un viajero va anotando la ciudad en la que pernocta. Al final del viaje debe haber dormido en todas las ciudades. Teniendo en cuenta que podría dormir varias veces seguidas (o alternas) en la misma ciudad, ¿cuántos itinerarios distintos podría haber hecho el viajero?

17. (a) Comprueba que $p_2(n) = \lfloor n/2 \rfloor$.

    (b) Demuestra que, para k fijo, $p_k(n)$ es una función creciente con n.

Ejercicios adicionales

18. En un juego se lanza una moneda: si sale cara ganas 1 euro y si sale cruz pierdes 1 euro. Si comienzas con 1 euro y quieres jugar 50 partidas, ¿cuál es el número de juegos en los que acabas ganando dinero (ten en cuenta que si te quedas en 0 euros no puedes seguir apostando)?

19. Calcula el número total de particiones de 12 en sumandos positivos que tienen todos sus sumandos distintos.