Sobre particiones de conjuntos y de enteros

1. Demuestra que
$$\frac{k^n}{k^k} \leq S(n,k) \leq \frac{k^n}{k!}.$$
Sugerencia: para la cota inferior, puedes usar inducción y la regla de recurrencia de $S(n,k)$.

2. a) Comprueba que
$$S(n,n-1) = \binom{n}{2} \quad \text{y que} \quad S(n,n-2) = \binom{n}{3} + \frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}.$$
Halla una fórmula análoga para $S(n,n-3)$.

b) Sabemos que $S(n,2) = (2^n-2)/2$. Halla una fórmula para $S(n,3)$.

3. Definimos, para cada $n \geq 1$,
$$B(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k) \qquad \text{y} \qquad \widetilde{B}(n) = \sum_{k=1}^{n} k!\, S(n,k).$$
Estas colecciones de números son conocidas como números de Bell y números de Bell ordenados, respectivamente. $B(n)$ cuenta el número de formas de partir $\{1,\dots,n\}$ en bloques no vacíos, mientras que $\widetilde{B}(n)$ cuenta el número de formas de partir $\{1,\dots,n\}$ en bloques no vacíos cuando estos bloques van numerados.

Por convenio, definimos $B(0) = \widetilde{B}(0) = 1$. Sus primeros valores son:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
$B(n)$	1	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147	115975	$\cdots$
$\widetilde{B}(n)$	1	1	3	13	75	541	4683	47293	545835	7087261	102247563	$\cdots$

Observa que los $\widetilde{B}(n)$ crecen mucho más rápidamente que los $B(n)$.

Comprueba que se verifican las siguientes reglas de recurrencia: para $n \geq 1$,
$$B(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B(k) \qquad \text{y} \qquad \widetilde{B}(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \widetilde{B}(k).$$

4. Consideramos n ciudades. Durante $2n$ días un viajero va anotando la ciudad en la que pernocta. Al final del viaje debe haber dormido en todas las ciudades. Teniendo en cuenta que podría dormir varias veces seguidas (o alternas) en la misma ciudad, ¿cuántos itinerarios distintos podría haber hecho el viajero?

5. Una colección de cromos consta de 20 cromos distintos. Vamos a ir durante 60 días al kiosko; cada día compraremos un cromo (que no sabemos a priori cuál es). Calcula la probabilidad de que completemos la colección justamente el último día.

6. A las próximas elecciones se presentan n partidos políticos. Cada elector los va a ordenar, según sus preferencias, en diversas categorías: los que más le gustan, los de la siguiente categoría, etc. Obsérvese que se permiten "empates" entre preferencias. Denominamos rankings a estas ordenaciones.

Por ejemplo, si $n = 2$, y los partidos fueran A y B, tendríamos tres rankings distintos: A y B por igual, primero A y luego B, o primero B y luego A.

(a) ¿Cuántos rankings distintos puede establecer un elector en estas elecciones, a las que concurren n partidos?

(b) Consideramos ahora N votantes. Cada uno establece su ranking. Llamamos a esta lista de opiniones individuales un ranking social. ¿Cuántos rankings sociales distintos hay?

(c) Un sistema de elección social (o máquina de Arrow) es un procedimiento que a cada ranking social le asigna un ranking (que no tiene por qué coincidir necesariamente con ninguno de los rankings individuales). ¿Cuántas máquinas de Arrow distintas hay para un sistema con N votantes y n partidos?

7. En este ejercicio contamos el número $F(n)$ de maneras de escribir n como *producto* de enteros mayores que 1 en un par de casos especiales. Consideramos aquí que el orden de presentación de los factores es *irrelevante*. Por ejemplo, $F(3) = 1$ (sólo tenemos la escritura $3 = 3$), $F(6) = 2$ (las posibilidades son $6 = 2 \cdot 3$ y $6 = 6$), o $F(12) = 4$ (con $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, $12 = 2 \cdot 6$, $12 = 3 \cdot 4$, $12 = 12$).

a) Supongamos que n es un producto de k primos distintos, $n = p_1 \cdots p_k$. Obtén una fórmula para $F(n)$ en este caso.

b) Supongamos que $n = p^k$, donde p es un primo. Obtén una fórmula para $F(n)$ en este caso.

8. a) Comprueba que $p_2(n) = \lfloor n/2 \rfloor$.

b) Demuestra que, para k fijo, $p_k(n)$ es una función creciente con n.

Ejercicios adicionales

9. Comprueba que, para cada $n \geq 1$,

$$B(n) = \frac{1}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$$

(esta identidad es conocida como la *fórmula de Dobiński*).

10. b) Comprueba que $p_3(n)$ coincide con el número de particiones de $2n$ que tienen exactamente tres partes, todas de tamaño $< n$.

b) Halla una fórmula para $p_3(n)$.