Identidades con coeficientes binómicos/multinómicos

1. Demuestra con argumentos combinatorios las siguientes identidades:

a) $$\binom{n}{k}\binom{k}{l} = \binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l}$$

b) $$\binom{2n}{n+1} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\binom{n}{k+1}$$

c) $$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{j=0}^{n}\binom{j}{k}$$

d) $$\binom{2n}{n}^2 = \sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{(n-k)!^2\,k!^2}$$

Sugerencias. b) Clasifica los $2n$ elementos en dos tipos. c) Clasifica los conjuntos en función de su mayor elemento. d) Cuenta el número de maneras de elegir dos subconjuntos de tamaño n de $\{1,\dots,2n\}$ no necesariamente disjuntos.

2. Comprueba que, para n fijo y $1 \le k \le n-1$,

$$\binom{n}{k}^2 > \binom{n}{k-1}\cdot\binom{n}{k+1}$$

y deduce que

$$\ln\binom{n}{k} > \frac{1}{2}\left[\ln\binom{n}{k-1} + \ln\binom{n}{k+1}\right]$$

(en estas condiciones, se dice que la sucesión $\left(\binom{n}{k}\right)_{k=0}^{n}$ es logcóncava).

3. Comprueba que

a) $$\frac{n^k}{k^k} \le \binom{n}{k} \le \frac{n^k}{k!}.$$

b) Para k fijo, $$\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!} \qquad \text{cuando } n \to \infty.$$

(El símbolo $a_n \sim b_n$ significa que $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 1$).

Sugerencia para la cota inferior en a): Comprueba primero que para cualquier m en el rango $0 < m < k \le n$, $\frac{n}{k} \le \frac{n-m}{k-m}$.

4. Prueba (algebraica y combinatoriamente) la siguiente regla de recurrencia para un coeficiente multinómico:

$$\binom{n}{a,b,c} = \binom{n-1}{a-1,b,c} + \binom{n-1}{a,b-1,c} + \binom{n-1}{a,b,c-1}, \qquad \text{donde } a+b+c=n.$$

Aplicaciones combinatorias de los coeficientes binómicos/multinómicos

5. Tenemos una moneda regular. Calcula la probabilidad de que, si la lanzamos 10 veces, salgan entre 4 y 6 caras (ambas incluidas). Calcula también la probabilidad de que, al lanzarla 100 veces, salgan entre 40 y 60 caras. Calcula numéricamente (con tu software matemático favorito) ambas probabilidades y compáralas.

6. Calcula la probabilidad de que, al lanzar 5 dados, la suma de los dados sea 18.

7. Se lanzan 3 dados indistinguibles. ¿Cuántos posibles resultados (no cuántas sumas, sino cuántos posibles valores de los 3 dados) pueden obtenerse? ¿Y si fueran n dados indistinguibles?

8. a) Comprueba que el número de listas de longitud n con ceros y unos en las que hay exactamente r unos y que no tienen unos consecutivos es $\binom{n-r+1}{r}$.

b) ¿De cuántas formas distintas se puede extraer de $\{1, 2, \ldots, n\}$ un conjunto de r números de forma que no haya dos consecutivos?

9. Consideramos el conjunto de símbolos $X = \{1, 2, 3, \ldots, 50\}$. Diremos que un subconjunto A de X está *separado* si la diferencia entre cualesquiera dos de sus elementos es al menos tres unidades. Por ejemplo, $\{10, 15, 17, 40\}$ no está separado, mientras que $\{10, 15, 18, 40\}$ sí lo está. ¿Cuántos subconjuntos separados distintos de cinco elementos se pueden formar con los elementos de X?

10. Una torre de ajedrez está situada en la casilla inferior izquierda del tablero (8×8), con la intención de llegar a la esquina opuesta en cuatro movimientos, avanzando en cada uno de ellos hacia arriba o hacia la derecha. ¿De cuántas maneras distintas lo puede hacer? (*Nota*: la torre no puede quedarse quieta en ninguno de los 4 movimientos).

11. Obtén una fórmula para el número de palabras de longitud $4n$ que podemos formar con los bloques `as` y `coco`.

12. Toma cuatro barajas españolas y selecciona únicamente las cartas del palo de oros. Tienes así 40 cartas, con 4 ases, 4 doses, 4 treses, etc. (todos de oros). ¿De cuántas formas puedes ordenar estas 40 cartas?

13. Disponemos de las letras `AABBCDEFG`. ¿Cuántas palabras (con o sin sentido) de longitud 9 se pueden formar? ¿Y de longitud 6?

Ejercicio adicional

14. Para cada $k = 0, 1, \ldots, n$, llamamos $D_n(k)$ al número de permutaciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$ que fijan exactamente k elementos. Observa que $D_n(0) = D_n$, el número de desbarajustes. Por convenio, tomamos $D_0 = 1$.

a) Comprueba que

$$D_n(k) = \binom{n}{k} D_{n-k}.$$

b) Observa que

$$\sum_{k=0}^{n} D_n(k) = n!$$

Estima, si n es (moderadamente) grande, los valores de $D_n(0)$, $D_n(1)$, $D_n(2)$ y $D_n(3)$.

c) Comprueba que

$$\sum_{k=0}^{n} k D_n(k) = n!,$$

y deduce que, *en media*, una permutación deja fijo *un* elemento.