APLICACIÓN DE LAS REGLAS BÁSICAS DE RECUENTO

1. En una quiniela hay 14 partidos con tres resultados posibles cada uno: 1, X, 2.

a) ¿Cuántas quinielas debes rellenar para estar seguro de acertar los resultados de los 14 partidos?

b) Un adivino asegura que en la siguiente jornada no van a salir signos consecutivos iguales. Si el adivino está en lo cierto, ¿cuántas quinielas debes rellenar para asegurar el acierto?

2. a) Calcula el número de funciones inyectivas de un conjunto de 7 elementos en un conjunto de 10 elementos.

b) Calcula el número de maneras de distribuir 5 bolas distintas en 8 cajas distintas si en cada caja puede haber como mucho una bola.

3. Vamos a fabricar tarjetas de identificación poniendo símbolos en las casillas de una matriz 3×3. En las filas pueden repetirse los símbolos, pero los tres de cada columna han de ser distintos. ¿Cuántos símbolos son necesarios (como mínimo) si queremos que haya al menos 10^9 tarjetas distintas? (*Indicación*: hágase la cuenta por columnas).

4. a) ¿Cuántos enteros entre 1 y 10000 tienen exactamente un 8 y un 9 en su expresión decimal?

b) ¿Cuántos números naturales tienen en su expresión en base 10 todos sus dígitos distintos?

5. Calcula el número de permutaciones de la palabra ABCDEFG que contengan:
(a) La secuencia ABC (b) Las secuencias AB, CD y EF (c) Las secuencias AB, BC y EF.

6. ¿De cuántas maneras podemos ordenar las 27 letras del alfabeto de forma que A y B no aparezcan consecutivamente? ¿Y si además A y C no pueden aparecer consecutivamente?

7. ¿Cuántos números naturales menores que 60 000 son primos con 30?

8. Halla los cardinales de los siguientes conjuntos:

$$X = \{(A, B) \,:\, A, B \subseteq \{1, \dots, n\},\ A \cap B = \emptyset\},$$
$$Y = \{(A, B) \,:\, A, B \subseteq \{1, \dots, n\},\ A \subseteq B\}$$
$$Z = \{(A, B) \,:\, A, B \subset \{1, \dots, n\},\ A \subsetneq B\}.$$

(*Indicación*: clasifica los números entre 1 y n en función de su pertenencia a A, a B, o a ninguno de ellos.)

9. Consideramos una colección $A_1, \dots, A_k$, con $k \geq 2$, de subconjuntos de un conjunto X. Prueba, por inducción, las siguientes desigualdades:

$$\text{(a)} \qquad \sum_{j=1}^{k} |A_j| - (k-1)|X| \leq \Big| \bigcap_{j=1}^{k} A_j \Big| \leq \min_{j=1,\dots,k} |A_j|$$
$$\text{(b)} \qquad \sum_{j=1}^{k} |A_j| - \sum_{1 \leq i < j \leq k} |A_i \cap A_j| \leq \Big| \bigcup_{j=1}^{k} A_j \Big| \leq \sum_{j=1}^{k} |A_j|.$$

(Observa que hay cuatro enunciados que comprobar).

10. He aquí un acertijo (algo truculento) debido a Lewis Carroll. En una batalla entre 100 combatientes, 80 perdieron un brazo, 85 una pierna, 70 un ojo y 75 una oreja. Un número x de ellos perdió las cuatro cosas.

a) Demuestra que $10 \leq x \leq 70$.

b) ¿Se pueden mejorar estas estimaciones?

(*Indicación*: el ejercicio anterior podría ayudarte).

11. Se colorea el plano $\mathbb{R}^2$ con dos colores. Es decir, a cada punto del plano se le asigna uno de esos dos colores. Demuestra que hay dos puntos a distancia 1 del mismo color.

12. En una clase se imparten 5 asignaturas, con dos posibles calificaciones cada una: suspenso y aprobado. ¿Cuántos alumnos tenemos que escoger para estar seguros de que 3 de ellos tienen las mismas notas en las 5 asignaturas?

13. ¿Se puede asegurar que hay (al menos) dos españoles tales que tengan: la misma inicial de su (primer) nombre, la misma inicial de su primer apellido, la misma letra del DNI, y que celebren su cumpleaños el mismo día?

(*Nota*: hay 27 posibles iniciales, pero solamente 23 posibles letras del DNI; y hay 366 posibles fechas de cumpleaños).

14. Demuestra que en cualquier reunión siempre hay dos personas que tienen el mismo número de conocidos (en dicha reunión).

(*Nota*: consideramos que ser conocido es algo mutuo; es decir, que si a conoce a b, entonces b conoce a a; y que nadie se conoce a sí mismo).

15. Prueba que en cualquier reunión de 6 personas, o bien 3 de ellas se conocen entre sí, o bien 3 de ellas no se conocen entre sí.

(*Nota*: se aplica los mismos comentarios que en el ejercicio anterior).

(*Indicación*: dibuja un hexágono con todas sus diagonales y pinta de rojo o azul las líneas en función de si se conocen o no).

16. Sea S un conjunto de n números naturales. Prueba que existe algún subconjunto no vacío de S tal que la suma de sus elementos es múltiplo de n.

(*Indicación*: asocia a cada subconjunto el valor, modulo n, de la suma de sus elementos).

Ejercicios adicionales

17. Demuestra que en cualquier subconjunto de $n+1$ elementos del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ hay un elemento que divide a otro.

(*Indicación*: construye los palomares en función del máximo divisor impar de cada número).

18. Demuestra que existe una potencia de 3 cuya expresión decimal acaba en 001.

(*Indicación*: observa que hay 1000 posibles restos módulo 1000).

19. a) Sea p un número primo y n un entero positivo. ¿Cuál es la potencia de p en la descomposición en factores primos de $n!$?

b) Halla el número de ceros en que termina el número $200!$.