Matemática discreta
Segundo del grado en Matemáticas, UAM, 2016-2017

Examen final, 13-1-2017

inicial primer apellido

Apellidos, nombre ....

nota final

1. (2.5 puntos)

a) Las contraseñas de acceso a una red tienen longitud 10, y están formadas por letras minúsculas (hay 26, excluyendo la ñ), letras mayúsculas (otras 26) y los números del 0 al 9. Por seguridad, se exige que se utilice al menos una mayúscula, al menos una minúscula, y al menos un número. ¿Cuántas contraseñas distintas hay en el sistema?

b) Un piano tiene 88 teclas. Una melodía es una sucesión de pulsaciones de teclas. ¿Cuántas melodías de 123 pulsaciones hay en las que se presionen todas las teclas menos una?

c) Para cada $n \geq 1$, llamamos a_n al número de listas de longitud n con símbolos $\{1, 2, \ldots, 10\}$ que no tienen unos consecutivos. Halla a_4.

2. (1.5 puntos)

a) Sea G un árbol que tiene (al menos) un vértice de grado 12. Prueba que G tiene al menos 12 hojas.

b) Sea A un conjunto de 100 números enteros entre 1 y 10^6. Prueba que existen (al menos) dos subconjuntos de A que tienen el mismo número de elementos y el mismo valor de la suma de sus elementos.

3. (2 puntos) Sea P_n el conjunto de los polinomios $p(x)$ de grado exactamente n cuyos coeficientes son ceros y unos.

a) Calcula el tamaño del conjunto P_n.

b) Cuenta cuántos polinomios $p(x)$ hay en P_{2n} que cumplan la condición $p(1) = p(-1)$.

4. (2 puntos) Hemos colocado 20 sillas en torno a una mesa circular. Las sillas están numeradas, del 1 al 20. Disponemos de 100 almohadas rojas, 100 verdes, 100 azules y 100 blancas.

a) Calcula el número de formas distintas de colocar almohadas en las sillas si sillas contiguas no deben llevar el mismo color de almohada.

b) ¿Y si sólo tuviéramos 10 almohadas de cada color?

c) ¿Y si sólo tuviéramos 9 almohadas rojas (y 10 de cada una de las restantes)?

5. (2 puntos) Consideramos la sucesión $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ dada por

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k \qquad \text{para cada } n \geq 0.$$

a) Halla la función generatriz de la sucesión (a_n).

b) Utiliza esa función generatriz para comprobar que

$$a_n = 2^{n+1} - 1 \qquad \text{para cada } n \geq 0.$$

6. (1 punto) Halla el número de grafos con vértices $\{1, \ldots, n\}$ en los que todos los vértices tienen grado par. (Sugerencia: considera grafos con vértices $\{1, \ldots, n-1\}$.)