Inicial primer apellido

Matemática Discreta
2º del Grado en Matemáticas
CURSO 2015-2016

14 DE ENERO DE 2016

Examen final

APELLIDOS Y NOMBRE ______________________________ D.N.I. ______________

Justificar todas las respuestas.

1. (1 punto) Un grupo de 81 personas se sienta en una fila que consta de 88 sillas. Prueba que hay, al menos, 11 sillas consecutivas ocupadas. (Nota: observa que quedan 7 sillas vacías.)

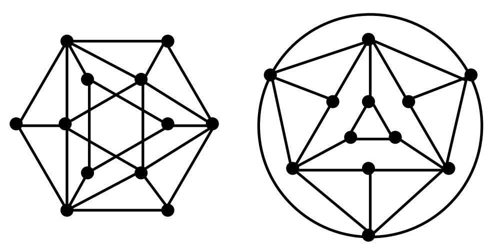
2. (1 punto) En una carrera participan n personas. A cada una de ellas se le asigna un dorsal con un número entre 1 y n. Supongamos que todos los participantes alcanzan la meta y no hay empates. De todos los posibles resultados ¿en cuántos de ellos el ganador no lleva el dorsal con el número 1, el segundo finalista no lleva el dorsal con el número 2 y el tercer finalista no lleva el número 3?

3. (1 punto) Sean n y m dos enteros positivos. Demuestra la siguiente igualdad usando argumentos combinatorios:

$$\sum_{k\geq 1} \binom{m}{k} S(n,k)\, k! = m^n.$$

Aquí, $S(n,k)$ denota un número de Stirling de segunda especie. (Nota: recuerda que m^n cuenta, por ejemplo, el número de aplicaciones que hay entre el conjunto $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ y el conjunto $B = \{1, 2, \ldots, m\}$.)

4. (1 punto) Determina si los siguientes grafos son o no isomorfos



5. (3 puntos) Consideremos el conjunto R de 16 puntos del plano definido por

$$R = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 0 \leq a, b \leq 3\}$$

(a) Queremos colorear los puntos de R de tal forma que (a,b) lleve un color distinto de (c,d) siempre que $a+b = c+d$. Si disponemos de 12 colores, ¿de cuántas formas distintas podremos hacerlo?
(b) Ahora queremos colorear los puntos de R de tal forma que (a,b) lleve un color distinto de (c,d) siempre que $a = c$ y $b = d+1$. Además, el punto $(1,0)$ debe llevar color distinto del punto $(2,0)$, y el punto $(1,3)$ debe llevar color distinto del punto $(2,3)$. Disponemos, de nuevo, de 12 colores. ¿De cuántas formas distintas podremos hacerlo?
(c) Calcula (en los dos casos) el mínimo número de colores necesario para colorear los puntos de R.

6. (3 puntos) La sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ viene definida por

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_1 = 2, \\ a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 2^n \quad \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

(a) Resuelve la ecuación de recurrencia.
(b) Da una expresión explícita para la función generatriz $f(x)$ de la sucesión $\{a_n\}$.
(c) Calcula las funciones generatrices:
   i. $g(x)$ de la sucesión $\{b_n\}$ dada por $b_n = na_n + (-2)^n$, $n \geq 0$.
   ii. $h(x)$ de la sucesión $\{c_n\}$ dada por $c_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$, $n \geq 0$.

(Nota: observa que si no resuelves el apartado (b) puedes hacer el (c) dejando la solución en términos de $f(x)$.)