ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Hoja 9. Distancia entre variedades. Isometrías o movimientos I.

1. Sea (A, E, φ) un espacio afín euclídeo de dimensión n, y $\mathcal{B}$ una referencia ortonormal. Sea L la variedad dada implícitamente como los puntos de coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ que satisfacen la ecuación $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = b$. Sea Q un punto de coordenadas $(q_1, \dots, q_n)$. Demostrar que

$$d(Q, L_1) = \frac{|\lambda_1 q_1 + \cdots + \lambda_n q_n - b|}{\sqrt{\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2}}.$$

2. Sea (A, E, φ) un espacio afín euclídeo de dimensión n. Sean $L_1 = P_1 + U_1$ y $L_1 = P_2 + U_2$ dos variedades lineales de A. Llamemos $U = U_1 + U_2$, y sea $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$ una base de U. Finalmente, sea $\vec{w} = \overrightarrow{R_1 R_2}$, donde $R_1 \in L_1$ y $R_2 \in L_2$ son dos puntos cualesquiera. Entonces

$$d(L_1, L_2) = \sqrt{\left|\det(M_A)/\det(M)\right|},$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} \langle \vec{u}_1, \vec{u}_1 \rangle & \cdots & \langle \vec{u}_1, \vec{u}_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \vec{u}_m, \vec{u}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{u}_m, \vec{u}_m \rangle \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M_A = \begin{pmatrix} \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle & \langle \vec{w}, \vec{u}_1 \rangle & \cdots & \langle \vec{w}, \vec{u}_m \rangle \\ \langle \vec{u}_1, \vec{w} \rangle & \langle \vec{u}_1, \vec{u}_1 \rangle & \cdots & \langle \vec{u}_1, \vec{u}_m \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \vec{u}_m, \vec{w} \rangle & \langle \vec{u}_m, \vec{u}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{u}_m, \vec{u}_m \rangle \end{pmatrix}$$

(Sugerencia: escribir $\vec{w} = \vec{w}_U + \vec{w}_{U^\perp}$, donde $\vec{w}_U \in U$ y $\vec{w}_{U^\perp} \in U^\perp$. Entonces sabemos por un teorema anterior que $d(L_1, L_2) = \|\vec{w}_{U^\perp}\|$. Por otro lado, como $\vec{w}_U \in U$, $\vec{w}_U$ se puede escribir como una combinación lineal de los $\vec{u}_i$.)

3. Encuentra la expresión analítica de las siguientes isometrías:

a) La simetría deslizante de eje paralelo a la recta $2x + y = 3$ y que transforma $(2, 1)$ en $(1, 0)$.

b) El giro de ángulo $\pi/3$ que lleva $(2, 1)$ en $(1, 0)$.

4. Encuentra la expresión analítica de las siguientes isometrías de $\mathbb{R}^3$:

a) La reflexión o simetría respecto al plano $3x - y + 2z = 1$.

b) La rotación helicoidal respecto al eje $\langle (1, -1, 0) \rangle$, con ángulo π y vector de traslación $(2, -2, 0)$.

c) La composición de la isometría del apartado a) con la del apartado b).

5. a) Determina las ecuaciones (respecto del sistema de referencia canónico de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$) de la simetría axial con respecto a la recta $y + x = 1$.

b) Determina las ecuaciones (respecto del sistema de referencia canónico de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$) del movimiento helicoidal de eje la recta $x = y = z$, ángulo de rotación $\theta = \pi$ y vector de traslación $\vec{v} = (3, 3, 3)$.

6. Considera la familia de afinidades de $A^2_{\mathbb{R}}$ dadas por las ecuaciones (con respecto a un sistema de referencia canónico):

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cy + a \\ x + b \end{pmatrix}.$$

Determina los valores de los parámetros a, b y c para los que estas afinidades son movimientos y calcula sus elementos geométricos.

7. Estudia las siguientes isometrías del plano:

$$\left\{\begin{array}{l} x' = -2 + \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{l} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y. \end{array}\right.$$