ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Hoja 8. Espacio afín IV. Aplicaciones afines. Distancia entre variedades lineales.

Aplicaciones afines.

1. Calcula las ecuaciones de la homotecia $f\colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ tal que $f(1,1) = (4,2)$ y $f(-1,0) = (-2,-1)$, si existe.

2. Calcula las ecuaciones de la afinidad $T\colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ que cumple $T(1,1) = (2,3)$, $T(3,2) = (3,8)$ y $T(2,3) = (1,7)$, si existe.

3. a) Sean $r+1$ puntos $\{p_0, p_1, \ldots, p_r\}$ de un espacio afín $\mathbb{A}$ de dimensión n. Llamemos $(x_{kj})_{0\le j\le n}$ a las coordenadas de cada punto p_k en una referencia baricéntrica $\mathcal{R}$. Demuestra que, si denotamos por $[p_0p_1\cdots p_r]$ la mínima variedad lineal que contiene a los puntos $p_0, p_1, \ldots, p_r$, entonces se tiene que

$$\dim([p_0 \ldots p_r]) + 1 = \mathrm{rg}(M),$$

siendo

$$M = \begin{pmatrix} x_{00} & \cdots & x_{r0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{0n} & \cdots & x_{rn} \end{pmatrix}.$$

b) Si en el punto anterior tenemos que $r = n$, comprueba que, para que los $n+1$ puntos sean afínmente independientes, es necesario y suficiente que $\det(M) \neq 0$.

4. Comprueba que las aplicaciones afines son, exactamente, aquellas que conservan los baricentros. Es decir, demuestra que, si $\mathbb{A}_1$ y $\mathbb{A}_2$ son espacios afines, entonces $f : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2$ es una aplicación afín si y sólo si, para cada familia finita de puntos $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{A}_1$ y cada familia de escalares $\mu_1, \ldots, \mu_r$ tales que $\sum_{j=1}^r \mu_j = 1$, se cumple que

$$f\Big(\sum_{j=1}^r \mu_j a_j\Big) = \sum_{j=1}^r \mu_j f(a_j).$$

5. Sean $\mathbb{A}_1$ y $\mathbb{A}_2$ espacios afines y sean $r+1$ puntos $(p_0, p_1, \ldots, p_r)$ afínmente independientes de $\mathbb{A}_1$. Demuestra que para cada lista $(q_0, q_1, \ldots, q_r)$ de $r+1$ puntos de $\mathbb{A}_2$, existe una única aplicación afín $f : [p_0p_1\cdots p_r] \longrightarrow \mathbb{A}_2$ tal que $f(p_j) = q_j$ para cada$j = 0, \ldots, r$.

6. En $\mathbb{A}^3$, consideramos los puntos

$$A = (1,1,0),\ B = (2,0,2),\ C = (1,2,\alpha),\ D = (3,4,-1),$$

$$A' = (2,1,0),\ B' = (2,2,1),\ C' = (1,1,0),\ D' = (3,0,0),$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Halla los valores de α para los que existe una aplicación afín $f\colon \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^3$ tal que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$ y $f(D) = D'$.

7. En $\mathbb{A}^3$ y con respecto a un sistema de referencia ortonormal, halla las ecuaciones de la simetría ortogonal con respecto al plano Π de ecuación $x + y + z = 1$.

8. En $\mathbb{A}^3$ y con respecto a un sistema de referencia ortonormal, halla las ecuaciones de la simetría ortogonal con respecto a la recta de ecuaciones $x - y = 2,\ x + z = 3$.

Distancia entre variedades lineales.

9. En el espacio euclídeo de dimensión 3, calcula la distancia entre las rectas r y s que vienen dadas en un sistema de referencia ortonormal por las siguientes ecuaciones implícitas:

$$r : \begin{cases} x - y = 2 \\ x + z = 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad s : \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - 2z = -1 \end{cases} .$$

Halla un punto $p \in r$ y un punto $q \in s$ tales que $d(r, s) = d(p, q)$. ¿Son únicos los puntos p y q?

10. En el espacio euclídeo de dimensión 4, calcula la distancia entre las variedades lineales L_1 y L_2 que vienen dadas en un sistema de referencia ortonormal por las siguientes ecuaciones implícitas:

$$L_1 : \begin{cases} x + z + t = 1 \\ y - z - t = 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad L_2 : \begin{cases} x + y = 1 \\ y - z - 3t = 3 \end{cases} .$$

Halla puntos $p \in L_1$ y $q \in L_2$ tales que $d(L_1, L_2) = d(p, q)$. ¿Son únicos esos puntos p y q?

11. Halla una fórmula, en función de α y β, para calcular la distancia entre las rectas del espacio afín $\mathbb{A}^3$ con su estructura euclídea usual:

$$r := (1, 0, 1) + \langle (1,\ \alpha,\ 0) \rangle \quad \text{y} \quad s := (1, 1, 2) + \langle (1,\ 1,\ \beta) \rangle \,.$$

12. En $\mathbb{R}^3$, considera el producto escalar cuya matriz en la base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ es:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

Calcula la distancia del punto $(1, 1, -2)$ al plano que pasa por los puntos de coordenadas cartesianas $a = (1, -1, 1)$, $b = (1, 1, 1)$ y $c = (2, -1, 2)$ en la referencia $\{O; \mathcal{B}\}$.