

ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Hoja 7. ESPACIO AFÍN III. COORDENADAS CARTESIANAS Y BARICÉNTRICAS.

1. Sea $\mathfrak{R} = \{O : \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ un sistema de referencia cartesiano en el espacio afín $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ respecto del cual el punto p tiene coordenadas $(0, -1)$. Construye otro sistema de referencia en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ respecto del cual el punto p tenga como coordenadas $(-1, 0)$.

2. Sean P, Q y R tres puntos de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ tales que \vec{PQ} y \vec{PR} son linealmente independientes.

a) Prueba que los vectores \vec{RP} y \vec{RQ} son linealmente independientes.

Considera las referencias cartesianas $\mathcal{R} = \{P; \vec{PQ}, \vec{PR}\}$ y $\mathcal{R}' = \{R; \vec{RP}, \vec{RQ}\}$.

b) Escribe las coordenadas cartesianas de P, Q y R respecto a \mathcal{R} .

c) Escribe las coordenadas cartesianas de P, Q y R respecto a \mathcal{R}' .

d) Halla las ecuaciones de cambio de coordenadas entre las dos referencias.

e) Decide, de manera razonada, si existe algún punto en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ con las mismas coordenadas respecto a los dos sistemas de referencia.

3. Determina unas ecuaciones implícitas de las variedades lineales $L_t = p_t + V$ de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^4$, donde $p_t = (1, -2, 3, t)$ y $V = \mathcal{L}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ con $\vec{u}_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\vec{u}_2 = (0, 0, 1, 1)$ y $\vec{u}_3 = (1, 2, -1, 0)$ en un sistema de referencia fijado. ¿Para qué valor de t la variedad L_t pasa por el origen?

4. Halla unas ecuaciones implícitas de la variedad lineal L de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^4$ generada por los puntos $p_1 = (1, 0, 0, 1)$, $p_2 = (0, 1, 0, 1)$ y $p_3 = (0, 0, 1, 1)$, cuyas coordenadas están dadas con respecto a un sistema de referencia fijado. ¿Cuál es la dimensión de L ?

5. Halla unas ecuaciones implícitas del subespacio afín de \mathbb{A}^5 generado por los puntos $P_1 = (-1, 2, -1, 0, 4)$, $P_2 = (0, -1, 3, 5, 1)$, $P_3 = (4, -2, 0, 0, -3)$ y $P_4 = (3, -1, 2, 5, 2)$.

6. En $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ y con respecto de una referencia dada \mathfrak{R} , se dan los puntos $A = (1, 1)$, $B = (-2, 0)$, los vectores $\vec{u}_1 = (1, 2)$ y $\vec{u}_2 = (-1, 1)$ y la variedad lineal L de ecuaciones $x_1 - x_2 = 1$.

a) Halla las coordenadas de B respecto al sistema de referencia $\mathfrak{R}' = \{A; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.

b) Halla una ecuación implícita de L con respecto a \mathfrak{R}' .

7. Sea \mathfrak{R}' un sistema de referencia en el plano $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ que se obtiene girando un ángulo α en sentido positivo los vectores de un sistema de referencia canónico \mathfrak{R} . Si C es la circunferencia cuyos puntos $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ satisfacen $(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 4$ en el sistema de referencia \mathfrak{R} , halla las ecuaciones de C en el sistema de referencia \mathfrak{R}' . ¿Cuáles son las coordenadas del centro de la circunferencia respecto de \mathfrak{R}' ?

8. En \mathbb{A}^3 se consideran las referencias cartesianas:

$$\mathcal{R} = \{O, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} \text{ y } \mathcal{R}' = \{O', \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}.$$

Sean $O'_{\mathcal{R}} = (-1, 6, 2)$, $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 + \vec{u}_3$, $\vec{v}_2 = -\vec{u}_1$ y $\vec{v}_3 = 2\vec{u}_1 + 5\vec{u}_2 + 7\vec{u}_3$. Si un plano π tiene ecuación $2x - y + 3z = 0$ en \mathcal{R} , halla su ecuación respecto a \mathcal{R}' .

9. En \mathbb{A}^2 , considera los puntos P_0, P_1, P_2, Q_0, Q_1 y Q_2 , cuyas coordenadas cartesianas en el sistema de referencia cartesiano $\mathcal{R}_C = \{P_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ son las siguientes:

$$\begin{aligned} P_0 &= (0, 0), & P_1 &= (1, 7), & P_2 &= (1, 1) \\ Q_0 &= (-1, 1), & Q_1 &= (1, 4), & Q_2 &= (3, 0) \end{aligned}$$

- Demuestra que los puntos de $\mathcal{R}' = \{P_0, P_1, P_2\}$ son afinmente independientes. Demuestra que los puntos de $\mathcal{R}'' = \{Q_0, Q_1, Q_2\}$ son afinmente independientes.
- Halla las coordenadas baricéntricas de P_0, P_1 y P_2 respecto a \mathcal{R}'' y las de Q_0, Q_1 y Q_2 respecto a \mathcal{R}' .

Considera los sistemas de referencia cartesiana $\mathcal{R}'_C = \{P_0, P_0\vec{P}_1, P_0\vec{P}_2\}$ y $\mathcal{R}''_C = \{Q_0, Q_0\vec{Q}_1, Q_0\vec{Q}_2\}$.

- Calcula las coordenadas cartesianas de Q_0, Q_1 y Q_2 respecto a \mathcal{R}'_C y las de P_0, P_1 y P_2 respecto a \mathcal{R}''_C .
- Describe las ecuaciones generales de cambio de coordenadas cartesianas entre \mathcal{R}'_C y \mathcal{R}''_C .
- Describe las ecuaciones generales de cambio de coordenadas baricéntricas entre \mathcal{R}' y \mathcal{R}'' .

10. Sean $A = (1, 1, 1), B = (1, 2, 3), C = (2, 3, 1)$ y $D = (3, 1, 2)$ cuatro puntos de \mathbb{A}^3 dados por sus coordenadas cartesianas respecto a un sistema de referencia \mathcal{R} .

- Demuestra que $\mathcal{R}' = \{A, B, C, D\}$ es un sistema de referencia baricéntrico.
- Calcula las coordenadas cartesianas respecto a \mathcal{R} del baricentro de A, B, C, D .
- Si $\mathcal{R} = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, halla las coordenadas baricéntricas de O respecto a \mathcal{R}' .

11. Demuestra que en \mathbb{A}^2 los puntos medios de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo.

12. Sean O un punto y sean \vec{u} y \vec{v} dos vectores linealmente independientes. A todo escalar λ , se le asocian los puntos A y B tales que

$$\vec{OA} = \lambda\vec{u}, \quad \vec{OB} = \lambda\vec{v}.$$

Determina el baricentro de A y B en función de λ .

13. Halla las ecuaciones baricéntricas del plano que contiene a la recta $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = z$ y al punto $P = (-1, -2, 5)$.

14. En el espacio afín (A, V, φ) de dimensión n , sean L_1 y L_2 dos variedades lineales. Demuestra que si la dimensión de L_1 es $n - 1$ y la dimensión de $L_2 \geq 1$, entonces L_1 y L_2 no se pueden cruzar. (Esto lo hicimos en clase para dos rectas en \mathbb{A}^2 y para dos planos en \mathbb{A}^3 .)