ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Hoja 5. Espacio afín i

1. Sea S el conjunto de puntos (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ que satisfacen la condición $2x_1 + x_2 - x_3 = 3$. Demuestra, usando la definición, que S es una variedad lineal de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.

2. Demuestra que un subconjunto $H \neq \emptyset$ del espacio afín $\mathbb{A} = (A, V, \varphi)$ es una variedad lineal si y sólo si, para todo par de puntos p y q de H, la variedad lineal (recta) $L_{p,q} = p + \mathfrak{L}\{\varphi(p, q)\}$ está contenida en H.

3. Sea $T := \cup_{n\in\mathbb{N}}\{(x_1, x_2) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} : x_1 + x_2 = n\}$. ¿Es el conjunto T una variedad lineal de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$?

4. En $\mathbb{A}^3$, considera los conjuntos

$$B = \{(x, y, z) : x + 2y - z = 1\} \quad \text{y} \quad C = \{(x, y, z) : x - y + 2z = 2 \text{ y } x - z = 1\}.$$

(i) Demuestra que B y C son variedades lineales (es decir, escribe cada una de ellas de la forma $p+W$, donde $p \in A$ y W subespacio de $V = \mathbb{R}^3$; en realidad p es un punto cualquiera en la variedad y W es el espacio generado por sus vectores directores).

(ii) Determina si B y C se cortan, son paralelas, o se cruzan. Si se cortan, halla su intersección.

5. En $\mathbb{A}^4$, considera los conjuntos

$$B = \{(x, y, z, w) : x = 1, y = 2\} \quad \text{y} \quad C = \{(x, y, z, w) : z = -2, w = 3\}.$$

(i) Demuestra que B y C son variedades lineales.

(ii) Determina si B y C se cortan, son paralelas, o se cruzan. Si se cortan, halla su intersección.

6. Sea (A, V, φ) un espacio afín, y sea (B, W, φ) un subespacio afín (o variedad lineal), es decir, $B = p_0 + W$, donde p_0 es un punto en A.

(i) Demuestra que si $p, q \in B$, entonces $\varphi(p, q) \in W$ (con lo cual la aplicación $\varphi : B \times B \to W$ está bien definida, algo que no habíamos demostrado en clase).

(ii) Demuestra que (B, W, φ) es un espacio afín en sí mismo, es decir, satisface los dos axiomas de la definición de espacio afín.

7. Sea (A, V, φ) un espacio afín. Dado un vector $\vec{v} \in V$ y cuatro puntos p, q, r, s tales que $r = p + \vec{v}$ y $s = q + \vec{v}$, demuestra que $\vec{pq} = \vec{rs}$.