ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Hoja 4. Espacio vectorial euclídeo iv (formas cuadráticas)

1. Halla, completando cuadrados, una forma canónica de cada una de las siguientes formas cuadráticas definidas en $\mathbb{R}^3$:

$$a) \quad f(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 6xy + 4xz\,, \qquad b) \quad f(x,y,z) = xy + 2xz\,.$$

2. Para cada una de las formas cuadráticas siguientes, definidas en $\mathbb{R}^3$, halla una base ortonormal que la reduzca a su forma canónica y escribe esta forma canónica, indicando las ecuaciones del cambio de base:

$$a) \quad f(x,y,z) = 6x^2 + 5y^2 + 7z^2 - 4xy + 4xz\,, \qquad b) \quad f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2xz + 2yz\,.$$

3. Determina los valores del parámetro α para los que

a) $f(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 2\alpha\, xy + 2\alpha\, yz + z^2$ es definida positiva;

b) $f(x,y,z,t) = \alpha x^2 + 2xy + \alpha y^2 + \alpha z^2 + 2zt + \alpha t^2$ es definida negativa.

4. Determinar los valores del parámetro real a para los cuales la forma cuadrática cuya matriz con respecto a la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

define un producto escalar en $\mathbb{R}^3$.

5. a) Sea A un matriz 2×2 simétrica y definida positiva. Prueba que A se puede escribir (de manera única) como

$$A = C\,C^t,$$

donde C es una matriz triangular inferior cuyas elementos de la diagonal son todos positivos. Halla explícitamente C en términos de los elementos de A. (La anterior se conoce como *descomposición de Cholesky* de la matriz A.)

b) Comprueba que lo mismo ocurre en el caso 3×3 (y, en general, para $n \times n$).